

Státní úřad pro jadernou bezpečnost

radiační ochrana

DOPORUČENÍ

ZAVEDENÍ SYSTÉMU JAKOSTI PŘI VYUŽÍVÁNÍ
ZDROJŮ IONIZUJÍCÍHO ZÁŘENÍ V RADIOTERAPII A
RADIODIAGNOSTICE

VYJÁDŘENÍ A POUŽÍVÁNÍ NEJISTOT V KLINICKÉ
DOZIMETRII

Doporučení

Zavedení systému jakosti při využívání zdrojů
ionizujícího záření v radioterapii a radiodiagnostice
Vyjádření a používání nejistot v klinické dozimetrii

SÚJB

Obsah

2. Úvod.....	6
3. Stanovení standardní nejistoty měření.....	10
3.1 Stanovení nejistot hodnot vstupních veličin X_i	10
3.1.1 nejistota typu A	10
3.1.2 nejistota typu B.....	12
3.1.3 výpočet kombinované nejistoty	12
3.1.4 výpočet nejistoty při interpolaci mezi hodnotami se známou nejistotou.....	13
3.2 Stanovení naměřené hodnoty výstupní (měřené) veličiny Y	14
3.3 Stanovení nejistoty výstupní (měřené) veličiny Y	15
3.3.1 výpočet koeficientů citlivosti c_i	15
3.3.2 výpočet standardní nejistoty měření pro případ nekorelovaných vstupních veličin.....	15
3.3.3 výpočet standardní nejistoty měření pro případ korelovaných vstupních veličin	16
3.4 postup pro stanovení naměřené hodnoty a její standardní nejistoty - shrnutí (modifikováno podle [4])	16
3.5 základní vztahy pro výpočet standardní nejistoty měření - přehledná tabulka.....	17
4. Ilustrace postupu pro stanovení naměřené hodnoty a nejistoty měření na konkrétních příkladech	18
4.1 Příklad č. 1: Stanovení dávky ve vodě ve fotonovém svazku lineárního urychlovače v referenčních podmínkách pomocí ionizační komory.	18
4.2 Příklad č. 2: Stanovení kermové vydatnosti radionuklidového zdroje ^{192}Ir v brachyterapii..	23
4.3 Příklad č. 3: Stanovení první polotloušťky $d_{1/2}$ rentgenového svazku.....	30
5. Význam nejistot při posouzení shody výsledku měření s požadavkem (například s referenční hodnotou s ohledem na nejistotu měření a toleranci).	36
5.1 Uvádění shody se specifikací pro jednotlivou veličinu.	37
5.2 Uvádění shody s požadavky nebo specifikacemi v případě několika veličin.....	38
6. Základní pojmy týkající se nejistot měření: definice podle GUM, VIM – výňatky z těchto dokumentů [10, 11].	39
6.1. Definice vybraných základních pojmů	39
6.2. Model měření	46
6.2.1 Jednoduchý lineární model bez korelací	47
6.3. Chyby měření, nejistota měření.....	49
6.4. Zdroje nejistoty měření	50
6.5. Vyjadřování nejistot měření	52
6.5.1. Nejistoty typu A	52
6.5.2. Nejistoty typu B.....	54

6.6	Kombinovaná standardní nejistota	58
6.6.1	Nekorelované vstupní veličiny	58
6.6.2	Korelované vstupní veličiny	59
6.6.3	Pojmové diagramy: některé základní pojmy a jejich vztahy	61
Literatura	63

Předmluva

Státní úřad pro jadernou bezpečnost (dále jen SÚJB) vydal další publikaci z řady „Doporučení“, která si kladou za cíl usnadnit držitelům povolení, plnění povinností uložených zákonem č. 263/2016 Sb., atomový zákon a jeho prováděcích předpisů, stejně tak i dřívějším zákonem č. 18/1997Sb., o mírovém využívání jaderné energie a ionizujícího záření (atomový zákon) a o změně a doplnění některých zákonů, ve znění pozdějších předpisů (dále jen Atomový zákon), a jeho prováděcích předpisech, zejména vyhlášky č. 307/2002 Sb., o radiační ochraně, ve znění pozdějších předpisů.

Toto Doporučení je koncipováno jako samostatný souhrnný dokument. V jehož první části (kapitoly č. 2 až 4) jsou shrnuty a stručně vysvětleny základní pojmy, definice a přístupy, které jsou v současné době využívány při vyjadřování a používání nejistot měření. Na konkrétních příkladech dozimetrických měření z oblasti radiologické fyziky v radioterapii a radiodiagnostice je prakticky ilustrováno správné vyjadřování a používání nejistot měření. Ve druhé části dokumentu (kapitoly č. 5 a 6) je uvedeno přesné znění definic relevantních veličin a pojmů z oblasti metrologie a matematické statistiky. Tato druhá část je určena zájemcům, kteří chtějí přesněji a hlouběji pochopit postupy aplikované v první části dokumentu. V závěru dokumentu je uveden přehled příslušných norem, mezinárodních doporučení a další doporučené literatury.

Tento dokument není primárně věnován podrobnému stanovení velikosti konkrétních nejistot při rozličných druzích fyzikálních měření prováděných v radioterapii a radiodiagnostice. Dává však návod ke správnému stanovení velikosti nejistot při konkrétních měřeních prováděných v klinické dozimetrii.

Doporučení vypracoval Státní ústav radiační ochrany, v.v.i., tj. kolektiv autorů RNDr. Libor Judas Ph.D. a RNDr. Dana Kurková, Ph.D. jako zakázku SÚJB. Při jeho zpracování byly zohledněny zkušenosti odborníků z klinické praxe a připomínky Pracovní skupiny SÚRO pro radioterapii.

Protože v každé oblasti poznání se objevují nové informace, poznatky a přístupy, předpokládám, že Doporučení bude dále zdokonalováno a upřesňováno, a proto vítáme jakékoliv připomínky a komentáře od jeho uživatelů.



Ing. Karla Petrová
ředitelka Sekce radiační ochrany

2. Úvod

Cílem každého měření je získat kvantitativní informace o **měřené veličině**. Žádné skutečné měření ale není ideálně přesné. Měříme-li nějakou veličinu, naměřená hodnota vždy závisí na měřicím systému, často závisí na parametrech okolního prostředí, může záviset na postupu operátora a na dalších vlivech. Každé měření je tedy zatíženo chybou, jejíž velikost neznáme a v principu nemůžeme znát, protože žádným způsobem neumíme zjistit skutečnou (pravou) hodnotu měřené veličiny.

Přitom je ale velice důležité, abychom vždy uměli charakterizovat přesnost, s jakou bylo dané měření provedeno. K vyjádření přesnosti měření jsou v současné době využívány postupy založené na pojmu **nejistota měření**.

Tyto postupy pohlížejí na naměřenou hodnotu jako na **náhodnou veličinu**, jejíž hodnoty zjištěné při opakovaných měřeních jsou popsány určitým **rozdělením pravděpodobnosti**. Nejistotou měření pak rozumíme takový **interval hodnot měřené veličiny**, o kterém lze s určitou **předem stanovenou pravděpodobností** předpokládat, že obsahuje skutečnou (pravou) hodnotu měřené veličiny.

Standardní nejistota měření určuje takový interval hodnot měřené veličiny, o němž lze předpokládat, že s pravděpodobností cca 68 % obsahuje skutečnou (pravou) hodnotu měřené veličiny. V této publikaci jsou popsány postupy, kterými lze s dostatečnou spolehlivostí stanovit velikost standardní nejistoty měření.

V metrologické praxi (na kalibračních listech měřidel a pod.) nebývá obvykle uváděna standardní nejistota měření u , ale takzvaná **rozšířená nejistota měření**. Rozšířenou nejistotu měření U získáme vynásobením standardní nejistoty u **koeficientem rozšíření k** . Koeficient rozšíření je zpravidla volen tak, aby rozšířený interval hodnot měřené veličiny obsahoval skutečnou (pravou) hodnotu s pravděpodobností cca 95 %. Je-li ve výjimečných případech udáván koeficient rozšíření odpovídající jiné hodnotě **pravděpodobnosti pokrytí** než 95 %, musí být tato skutečnost u daného výsledku měření jasně uvedena.

Nejčastějším rozdělením pravděpodobnosti měřených hodnot, se kterým se v klinické dozimetrické praxi setkáváme, je **normální rozdělení** pravděpodobnosti, zvané též **Gaussovo rozdělení**. Tato skutečnost plyne z centrální limitní věty v teorii pravděpodobnosti. V případech, kdy lze usuzovat na normální (Gaussovo) rozdělení měřených hodnot, použijeme koeficient rozšíření $k = 2$, kterým vynásobíme vypočtenou standardní nejistotu měření. Takto rozšířený interval hodnot obsahuje skutečnou (pravou) hodnotu měřené veličiny s pravděpodobností přibližně 95 %.

Dalším pojmem, který je v tomto přístupu důležitý, je pojem **model měření**. Modelem měření rozumíme matematický vztah, který kvantitativně vyjadřuje závislost měřené veličiny Y na **vstupních veličinách** a **ovlivňujících veličinách**. Vstupní veličiny a ovlivňující veličiny budeme v této publikaci souhrnně označovat X_i . V modelu měření by měl být zahrnut nejen princip měřicí metody, ale i vliv prostředí, v němž měření probíhá, stejně jako vlivy dalších možných ovlivňujících veličin.

V klinické dozimetrii umíme obvykle model měření popsat funkčním vztahem v explicitním tvaru:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N) \quad (1)$$

V této publikaci se nebudeme zabývat složitější situací, kdy modelová rovnice zahrnuje měřenou veličinu Y pouze implicitně a není ji možno upravit do explicitního tvaru (1).

Příklady modelů měření

Příklad č. 1: dávka ve vodě

Stanovení dávky ve vodě ve fotonovém svazku lineárního urychlovače v referenčních podmínkách pomocí ionizační komory a elektrometru.

Model měření je popsán tímto vztahem (viz např. [1]):

$$D_w = M \cdot N_{D,w}(Q_0) \cdot k_{Q,Q_0} \cdot k_T \cdot k_p \cdot k_{el} \cdot \prod k_i \quad (2)$$

Tabulka č. 1: Přehled veličin modelu pro příklad č. 1

<i>veličina</i>	<i>označení</i>	<i>název</i>	<i>jednotka</i>
Y	D_w	dávka ve vodě	Gy
X_1	M	střední odezva elektrometru	C
X_2	$N_{D,w}(Q_0)$	kalibrační koeficient ionizační komory stanovený pro kvalitu kalibračního svazku záření Q_0	Gy/C
X_3	k_{Q,Q_0}	opravný faktor na kvalitu měřeného svazku Q odlišnou od kvality Q_0	1
X_4	k_T	oprava na teplotu vzduchu	1
X_5	k_p	oprava na tlak vzduchu	1
X_6	k_{el}	oprava odezvy elektrometru	1
X_7	$\prod k_i$	součin ostatních opravných faktorů	1

Poznámka: Ve starší dozimetrické literatuře jsou pojmy „faktor“ a „koeficient“ často používány prakticky jako synonyma. V souladu se současnými zvyklostmi se v této publikaci budeme držet pravidla, že pojem „faktor“ je používán pro bezrozměrné veličiny, zatímco pojem „koeficient“ je používán pro veličiny, které mají fyzikální rozměr.

Příklad č. 2: kermová vydatnost radionuklidového zdroje v brachyterapii

Stanovení kermové vydatnosti zdroje ^{192}Ir s vysokým dávkovým příkonem v brachyterapii pomocí kalibračního můstku a ionizační komory Farmerova typu.

Model měření je popsán následujícím vztahem (upraveno podle [2]):

$$\dot{K}_{ref} = M \cdot N_{k, Ir} \cdot k_T \cdot k_p \cdot k_{el} \cdot F_{tr} \cdot F_{gr} \cdot F_{rs} \cdot F_{att} \cdot (z / d_{ref})^2 \cdot t^{-1} \cdot \prod_i k_i \quad (3)$$

Tabulka č. 2: Přehled veličin modelu pro příklad č. 2

veličina	označení	název	jednotka
Y	\dot{K}_{ref}	kermová vydatnost	Gy
X_1	M	odezva elektrometru	C
X_2	$N_{k, Ir}$	kalibrační koeficient ionizační komory získaný z kalibračních koeficientů ve veličině kerma ve vzduchu pro ^{60}Co a rtg záření 250 kV (měřeno s tloušťkou stěny a build-up návleku $0,5 \text{ g/cm}^2$) se zohledněním různých vah jednotlivých kalibračních koeficientů. Váhy jsou rovny 0,8 pro $N_{K, 250kV}$ a 0,2 pro $N_{K, Co}$ $N_{K, Ir} = (0,8 \cdot A_{w, 250kV} N_{K, 250kV} + 0,2 \cdot A_{w, Co} N_{K, Co}) / A_{w, Ir}$ Faktory A_w jsou faktory pro dané kvality svazků a dají se pro jednotlivé ionizační komory nalézt v tabulkách.	Gy/C
X_3	k_T	oprava na teplotu vzduchu	1
X_4	k_p	oprava na tlak vzduchu	1
X_5	k_{el}	oprava odezvy elektrometru	1
X_6	F_{tr}	oprava na tranzitní čas při pohybu zdroje	1
X_7	F_{gr}	oprava na nehomogenní elektronovou fluenci ve vzduchové dutině ionizační komory (gradient komory)	1
X_8	F_{rs}	oprava na přídavné ionizace, které vznikají ze záření rozptýleného okolním materiálem	1
X_9	F_{att}	oprava na zeslabení primárních fotonů ve vzduchu mezi zdrojem a komorou	1
X_{10}	z	vzdálenost ionizační komory od zdroje	m
X_{11}	d_{ref}	referenční vzdálenost pro kermovou vydatnost (= 1 m)	m
X_{12}	t	doba měření	s
X_{13}	$\prod k_i$	součin ostatních opravných faktorů	1

Příklad č. 3: první polotloušťka rentgenového svazku

Stanovení první polotloušťky $d_{1/2}$ rentgenového svazku měřením zeslabovací křivky ionizační komorou v geometrii úzkého svazku

Model měření (viz např. [3]):

$$d_{1/2} = \frac{t_b \cdot \ln(2E_a / E_0) - t_a \cdot \ln(2E_b / E_0)}{\ln(E_a / E_b)} \quad (4)$$

Tabulka č. 3: Přehled veličin modelu pro příklad č. 3

veličina	označení	název	jednotka
Y	$d_{1/2}$	první polotloušťka rtg svazku	mm
X_1	E_0	kerma měřená bez přídavných filtrů	Gy
X_2	E_a	kerma nejbližší vyšší než $E_0/2$, změřená při tloušťce filtru t_a	Gy
X_3	E_b	kerma nejbližší nižší než $E_0/2$, změřená při tloušťce filtru t_b	Gy
X_4	t_a	tloušťka filtru pro změřenou kermu E_a	mm
X_5	t_b	tloušťka filtru pro změřenou kermu E_b	mm

3. Stanovení standardní nejistoty měření

Doporučené postupy pro stanovení standardní nejistoty měření jsou přehledně popsány například v dokumentu [4], z něhož text této kapitoly vychází, není-li uvedeno jinak.

3.1 Stanovení nejistot hodnot vstupních veličin X_i

U každé vstupní veličiny X_i musíme posoudit, jakého druhu je její nejistota, konkrétně zda se jedná o *nejistotu typu A* nebo o *nejistotu typu B*.

3.1.1 nejistota typu A

Nejistotu typu A stanovujeme pro ty vstupní veličiny X_i , u kterých máme k dispozici hodnoty z opakovaných měření této veličiny. Pokud je měření veličiny X_i prováděno s dostatečným rozlišením (tedy na dostatečný počet platných míst), pak při opakovaných měřeních pozorujeme rozptyl naměřených hodnot x_i .

Označme $x_{i,j}$ hodnotu veličiny X_i získanou při j -tém měření ($j = 1, 2, \dots, n$). Jestliže rozdělení naměřených hodnot $x_{i,j}$ kvalitativně odpovídá některému z obvyklých symetrických pravděpodobnostních rozdělení (normální, rovnoměrné, trojúhelníkové a pod.), pak za nejpravděpodobnější odhad hodnoty veličiny X_i považujeme aritmetický průměr \bar{x}_i spočtený ze všech měřených hodnot:

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n x_{i,j} \quad (5)$$

Označme nyní na chvíli měřenou veličinu X_i jako Q , abychom se v textu nejbližší následujících odstavců vyhnuli dvojímu indexování. Odhad \bar{q} hodnoty veličiny Q spočtený z n nezávislých pozorování ($n > 1$) je roven aritmetickému průměru hodnot q_j ($j=1, 2, \dots, n$):

$$\bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n q_j . \quad (6)$$

V klinické dozimetrii lze obvykle předpokládat, že pravděpodobnostní rozdělení hodnot veličiny X_i se blíží normálnímu (Gaussovu) rozdělení. Nejlepším odhadem standardní nejistoty $u_a(\bar{q})$ odhadu \bar{q} je v takovém případě **výběrová směrodatná odchylka aritmetického průměru**, kterou spočteme ze vztahu

$$u_a(\bar{q}) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum (q_j - \bar{q})^2} . \quad (7)$$

Je-li počet měření n malý, bude vztah (7) podhodnocovat velikost nejistoty typu A a je proto nutné zavést do výpočtů příslušný opravný faktor. Velikost tohoto opravného faktoru závisí jak na počtu měření n , tak na požadované pravděpodobnosti pokrytí. Pro malé hodnoty n přitom neplatí, že šířka intervalu hodnot pro 95% pravděpodobnost pokrytí je dvojnásobkem šířky intervalu pro 68% pravděpodobnost pokrytí. Hodnoty opravného faktoru pro různé počty měření a pro hodnoty pravděpodobnosti pokrytí v rozmezí 68 % až 99,7 % jsou uvedeny v Příloze G dokumentu [10] spolu s podrobným matematickým popisem tohoto problému.

Pokud víme, že budeme stanovovat výslednou kombinovanou nejistotu pro pravděpodobnost pokrytí 95 %, je možno při praktických měřeních postupovat tak, že pro počty měření menší než 10 vynásobíme hodnotu $u_a(\bar{q})$ spočtenou ze vztahu (7) opravným faktorem k_A , jehož hodnoty uvádí následující tabulka:

Tabulka č. 4: Hodnoty opravného faktoru k_A pro počet měření n menší než 10

n	2	3	4	5	6	7	8	9
k_A	7,0	2,3	1,7	1,4	1,3	1,3	1,2	1,2

S takto opravenou hodnotou dílčí nejistoty $u_a(\bar{q})$ pak dále pracujeme, jako by se jednalo o standardní nejistotu, tedy ji například kvadraticky sčítáme s ostatními dílčími standardními nejistotami. Po rozšíření výsledné spočtené kombinované nejistoty koeficientem rozšíření $k = 2$ dostaneme správnou hodnotu nejistoty pro 95% pravděpodobnost pokrytí.

Chceme-li výslednou kombinovanou nejistotu stanovit pro jinou než 95% pravděpodobnost pokrytí, musíme použít příslušnou hodnotu opravného faktoru z tabulky G.2 dokumentu [10].

Z hodnot opravného faktoru k_A v tabulce č. 4 je také zřejmé, že je-li to jen trochu možné, měli bychom vždy provést alespoň tři měření.

Praktická poznámka:

Při praktických výpočtech je vždy třeba pečlivě rozlišovat mezi *výběrovou směrodatnou odchylkou souboru* a *výběrovou směrodatnou odchylkou aritmetického průměru* (viz též kapitola 6.5.1 tohoto doporučení). Výběrová směrodatná odchylka souboru je mírou rozptýlu jednotlivých změřených hodnot měřené veličiny. Je určena šířkou náhodného rozdělení, z něhož měřené hodnoty pocházejí. Jedná se tedy o vlastnost konkrétního náhodného pravděpodobnostního rozdělení, kterou nemůžeme ovlivnit (zmenšit) zvýšením počtu provedených měření. Výběrovou směrodatnou odchylku souboru spočteme ze vztahu

$$s(q) = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum (q_j - \bar{q})^2} . \quad (8)$$

Výběrová směrodatná odchylka aritmetického průměru určená vztahem (7) je pak mírou toho, s jakou nejistotou známe střední hodnotu onoho náhodného rozdělení. Je nepřímo úměrná odmocnině z počtu provedených měření, v principu je tedy možné ji libovolně zmenšovat zvyšováním počtu měření.

Nejsme-li si někdy jisti, která z veličin (7) a (8) se skrývá za konkrétní statistickou funkcí v nějakém softwarovém produktu, je třeba porovnat výstup dané funkce s vlastním výpočtem pro nějakou triviální simulovanou sadu naměřených hodnot. Například pro „změřené“ hodnoty {1;2;3;4;5} udává vztah (7) výsledek přibližně 0,71, zatímco vztah (8) přibližně 1,58. Jednoduchým srovnáním tak zjistíme, že například funkce *smodch.výběr()* v české lokalizaci tabulkového kalkulátoru MS Excel vrací hodnotu výběrové směrodatné odchylky souboru, tedy hodnotu podle vztahu (8).

3.1.2 nejistota typu B

O nejistotě typu B hovoříme, jestliže její velikost stanovujeme jiným způsobem než statistickou analýzou série pozorování. Příkladem jsou nejistoty kalibračních koeficientů stanovené při kalibracích měřidel, nejistoty vyplývající z principu použitých metod měření, nejistoty vznikající v důsledku konečného rozlišení digitálních měřidel a pod. Příslušná standardní nejistota $u_b(x_i)$ je pak určena odborným úsudkem na základě dostupných informací o variabilitě veličiny X_i . Velikost standardní nejistoty typu B může být pro konkrétní měřicí postup spočtena předem.

Pokud je pro veličinu X_i známa pouze jedna hodnota, jako např. jedna naměřená hodnota, výsledná hodnota z předchozích měření, referenční hodnota z literatury a pod., použije se tato hodnota jako nejlepší odhad hodnoty x_i veličiny X_i . Standardní nejistota $u_b(x_i)$ náležící k této hodnotě x_i musí být převzata ze stejného zdroje.

Stává se, že pro hodnoty vstupní veličiny X_i známe pouze horní limit a_+ a dolní limit a_- . Nemáme-li žádné další informace o pravděpodobnostním rozdělení hodnot této vstupní veličiny, musíme použít předpoklad o rovnoměrném rozdělení hodnot v intervalu $\langle a_-; a_+ \rangle$. Nejlepším odhadem hodnoty je pak aritmetický průměr horního a dolního limitu, nejlepší odhad standardní nejistoty je dán vztahem

$$u_b(x_i) = \sqrt{\frac{1}{12} \cdot (a_+ - a_-)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{(a_+ - a_-)}{2} . \quad (9)$$

3.1.3 výpočet kombinované nejistoty

Kombinovaná standardní nejistota $u(x_i)$, někdy též značená $u_c(x_i)$, spojená s hodnotou x_i vstupní veličiny X_i je rovna geometrickému součtu standardní nejistoty typu A a standardní nejistoty typu B:

$$u(x_i) = \sqrt{u_a^2(x_i) + u_b^2(x_i)} \quad (10)$$

3.1.4 výpočet nejistoty při interpolaci mezi hodnotami se známou nejistotou

V praxi se poměrně často můžeme setkat se situací, kdy hodnota některé vstupní veličiny a její nejistota je změřena pouze v určitých bodech a my při dalším využití těchto naměřených hodnot mezi nimi interpolujeme. Příkladem takovéto situace je výpočet kermového kalibračního koeficientu ionizační komory pro záření nuklidu ^{192}Ir , který je použit v našem Příkladu č. 2. Popíšeme zde nyní postup pro určení nejistoty takovéto interpolované hodnoty.

Mějme nezávisle proměnnou Z a závisle proměnnou Φ , která je funkcí proměnné Z . Budeme předpokládat, že hodnoty z nezávisle proměnné Z známe s velmi malou nejistotou a že tuto nejistotu můžeme zanedbat. Předpokládejme dále, že pro hodnoty nezávisle proměnné z_1 a z_2 známe výsledky měření proměnné Φ , jejichž hodnoty jsou φ_1 a φ_2 a jejichž nejistoty jsou u_{φ_1} a u_{φ_2} . Nyní chceme interpolací získat hodnotu φ_{int} závisle proměnné Φ v bodě z_{int} a nejistotu $u_{\varphi,int}$ této hodnoty.

Jeden z možných postupů pro výpočet nejistoty interpolované hodnoty je založen na využití vlastností Lagrangeových interpolačních polynomů. Obecně je tento postup popsán například v článku [5]. My si zde ukážeme pouze jeho nejjednodušší případ, tedy užití lineární interpolace.

Namísto běžného vyjádření vztahu pro lineární interpolaci

$$\varphi_{int} = \varphi_1 + (z_{int} - z_1) \cdot \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)}{(z_2 - z_1)} \quad (11)$$

použijeme algebraicky ekvivalentní zápis

$$\varphi_{int} = L_1(z_{int}) \cdot \varphi_1 + L_2(z_{int}) \cdot \varphi_2, \quad (12)$$

kde $L_1(z)$ a $L_2(z)$ jsou Langrangeovy interpolační polynomy prvního stupně:

$$L_1(z) = \frac{z - z_2}{z_1 - z_2}, \quad L_2(z) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (13)$$

Přesný postup výpočtu nejistoty $u_{\varphi,int}$ interpolované hodnoty φ_{int} závisí na tom, nakolik jsou korelovány výsledky měření v bodech z_1 a z_2 . Pro mezní případy, kdy tato dvě měření jsou zcela nezávislá nebo naopak plně korelovaná, je možno vyjádřit nejistotu interpolované hodnoty jednoduchými vztahy.

Jestliže jsou měření v bodech z_1 a z_2 silně korelovaná, platí pro nejistotu $u_{\varphi,int}$ vztah

$$u_{\varphi,int} = L_1(z_{int}) \cdot u_{\varphi_1} + L_2(z_{int}) \cdot u_{\varphi_2}. \quad (14)$$

Jelikož vztah (14) má stejný tvar jako vztah (12), znamená to, že velikost nejistoty u_{φ} je lineárně interpolována mezi svými krajními hodnotami stejně jako je lineárně interpolována hodnota φ závisle proměnné Φ .

Jestliže naopak můžeme považovat měření v bodech z_1 a z_2 za nezávislá, bude pro nejistotu $u_{\varphi,int}$ interpolované hodnoty φ_{int} platit vztah

$$u_{\varphi,int} = \sqrt{[L_1(z_{int}) \cdot u_{\varphi_1}]^2 + [L_2(z_{int}) \cdot u_{\varphi_2}]^2}. \quad (15)$$

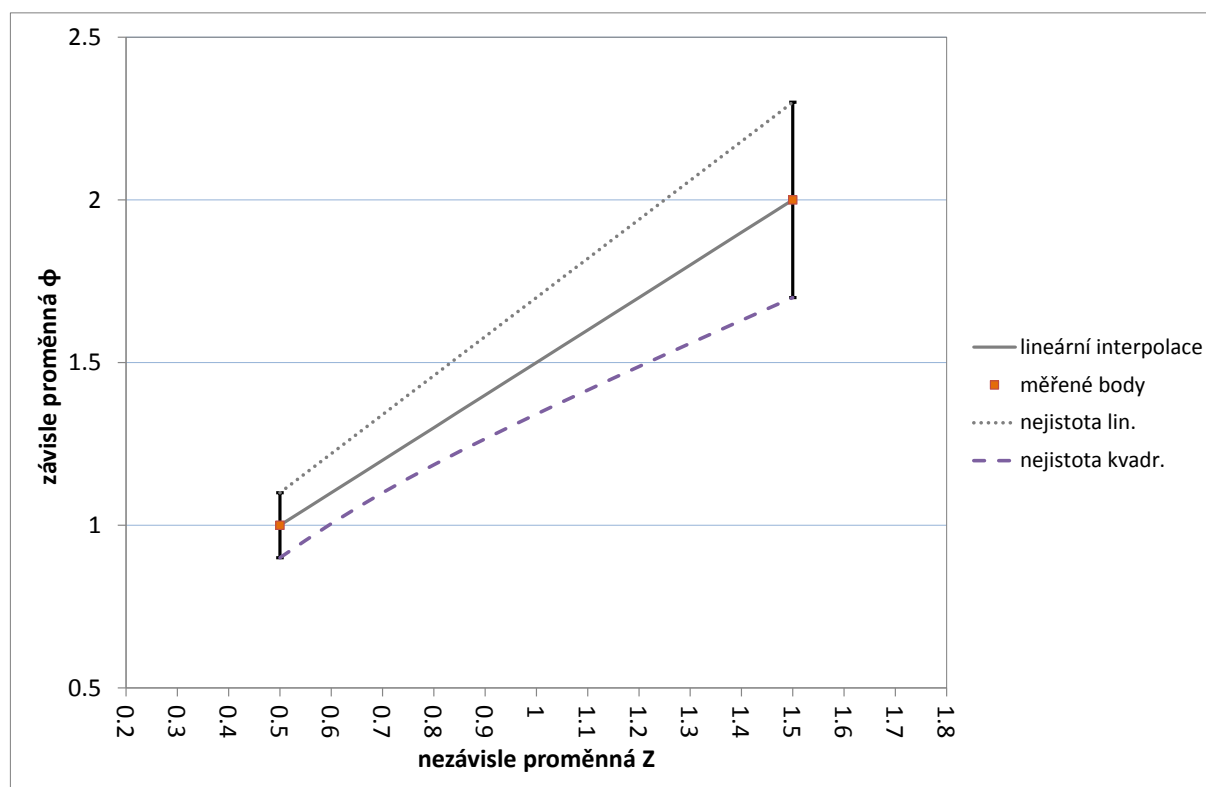
V tomto případě je nejistota interpolované hodnoty rovna druhé odmocnině z váženého součtu druhých mocnin nejistot v krajních bodech, kdy v roli vah vystupují druhé mocniny Lagrangeových interpolačních polynomů.

První krajní případ, tedy silná korelace, nastává například tehdy, kdy hodnotu kalibračního koeficientu pro určitou kvalitu svazku záření interpolujeme mezi hodnotami kalibračních koeficientů, které jsou uvedeny na jednom kalibračním listu a pocházejí z téže kalibrace.

Opačný krajní případ, tedy zanedbatelná korelace mezi hodnotami měření v bodech z_1 a z_2 , by nastal, kdybychom například interpolovali mezi dvěma hodnotami, z nichž každá byla získána v jiné době a v jiné kalibrační laboratoři. S ohledem na vzájemnou provázanost všech dozimetrických kalibračních laboratoří a jejich navázání na stejné primární etalony sice ani v tomto případě nemůžeme hovořit o úplné nezávislosti, ale v dobrém přiblížení můžeme považovat předpoklad o nezávislosti za splněný.

Následující obrázek ilustruje průběh interpolované nejistoty spočtené podle vztahů (14) a (15) pro následující hodnoty: $z_1 = 0,5$; $\varphi_1 = 1,0$; $u_{\varphi 1} = 0,1$; $z_2 = 1,5$; $\varphi_2 = 2,0$; $u_{\varphi 2} = 0,2$. Prostřední plná čára je lineární interpolací měřených hodnot proměnné Φ . Horní tečkovaná čára odpovídá nejistotě interpolované podle vztahu (14), tedy situaci, kdy měření v bodech z_1 a z_2 jsou silně korelovaná. Spodní čárkovaná křivka je spočtena podle vztahu (15), tedy pro případ interpolace mezi nekorelovanými hodnotami.

Obrázek č. 1: Ilustrace průběhu nejistoty interpolované hodnoty pro dva mezní případy



3.2 Stanovení naměřené hodnoty výstupní (měřené) veličiny Y

Každé veličině X_i přiřadíme pravděpodobnou hodnotu této veličiny x_i (v příslušných jednotkách) a odhad standardní nejistoty $u(x_i)$. Naměřenou hodnotu y měřené veličiny Y získáme dosazením hodnot x_i vstupních veličin X_i do konkrétní podoby vztahu (1).

3.3 Stanovení nejistoty výstupní (měřené) veličiny Y

3.3.1 výpočet koeficientů citlivosti c_i

Koeficient citlivosti c_i popisuje, do jaké míry je naměřená hodnota y výstupní veličiny Y ovlivňována malými změnami v hodnotě x_i veličiny X_i . Číselná hodnota koeficientu citlivosti je rovna hodnotě parciální derivace funkce (1) podle proměnné X_i v bodě (x_1, x_2, \dots, x_N) :

$$c_i = \left. \frac{\partial f}{\partial X_i} \right|_{X_1=x_1, \dots, X_N=x_N} . \quad (16)$$

Hodnota koeficientu citlivosti může být stanovena buď výpočtem ze vztahu (16) nebo numericky, tj. výpočtem změny hodnoty y výstupní veličiny Y při malé změně hodnoty x_i veličiny X_i .

3.3.2 výpočet standardní nejistoty měření pro případ nekorelovaných vstupních veličin

Je-li možno považovat všechny vstupní a ovlivňující veličiny X_i za vzájemně nekorelované nebo je-li možno pro dané měření jejich korelaci zanedbat, je druhá mocnina standardní nejistoty $u(y)$ naměřené hodnoty y výstupní veličiny Y dána vztahem

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^N u_i^2(y) , \quad (17)$$

kde veličina $u_i(y)$ je příspěvkem ke standardní nejistotě $u(y)$ naměřené hodnoty y výstupní veličiny Y vyplývající ze standardní nejistoty $u(x_i)$ veličiny X_i . Přitom platí

$$u_i(y) = c_i \cdot u(x_i) , \quad (18)$$

kde c_i je koeficient citlivosti přiřazený k hodnotě x_i veličiny X_i .

V praxi se často setkáváme se dvěma jednoduchými případy tvaru funkční závislosti (1), pro něž se výpočet standardní nejistoty měření dá zjednodušit.

Pokud je funkce (1) vyjádřena ve tvaru **lineární kombinace vstupních veličin** X_i , tj. pokud

$$f(X_1, X_2, \dots, X_N) = \sum_{i=1}^N p_i X_i , \quad (19)$$

pak hodnoty koeficientů citlivosti c_i jsou rovny hodnotám p_i a vztah (17) přechází na tvar

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^N p_i^2 u^2(x_i) . \quad (20)$$

Je-li funkce (1) vyjádřena jako **součin nebo podíl vstupních veličin** X_i , tj. platí-li

$$f(X_1, X_2, \dots, X_N) = c \prod_{i=1}^N X_i^{p_i} \quad , \quad (21)$$

je vhodné přejít k relativním standardním nejistotám $w(x_i)$:

$$w(x_i) = u(x_i) / |x_i| \quad . \quad (22)$$

Jednoduchým výpočtem je možno ukázat, že pro relativní standardní nejistotu $w(y)$ naměřené hodnoty y výstupní veličiny Y pak platí vztah

$$w^2(y) = \sum_{i=1}^N p_i^2 w^2(x_i) \quad . \quad (23)$$

3.3.3 výpočet standardní nejistoty měření pro případ korelovaných vstupních veličin

Není-li možno zanedbat korelace mezi vstupními veličinami, musíme použít obecnější formu vztahu (17):

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^N u_i^2(y) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N u_i(y) \cdot u_j(y) \cdot r_{ij} \quad , \quad (24)$$

kde veličina $u_i(y)$ má stejný význam jako ve vztazích (17) a (18), a r_{ij} je hodnota **korelačního koeficientu**, který vyjadřuje míru vzájemné závislosti veličin X_i a X_j . Hodnotu korelačního koeficientu můžeme určit analýzou souboru měřených dvojic hodnot (x_i, x_j) , máme-li takový soubor dat k dispozici. U měření prováděných v klinické dozimetrii nezřídka nastává situace, kdy víme, že z podstaty věci jsou některé vstupní veličiny vzájemně silně korelované. V takovém případě můžeme pro potřeby výpočtu nejistoty položit hodnotu příslušného korelačního koeficientu rovnou +1 nebo -1, jak bude níže ukázáno v příkladech.

3.4 postup pro stanovení naměřené hodnoty a její standardní nejistoty - shrnutí (modifikováno podle [4])

(i) **model měření, možné korelace vstupních veličin**

Matematicky vyjádřete závislost měřené veličiny (výstupní veličiny) Y na vstupních a ovlivňujících veličinách X_i v explicitním tvaru (1). Identifikujte případné vzájemné korelace vstupních veličin.

(ii) **známé korekce veličin X_i**

Identifikujte a proveďte všechny významné korekce hodnot vstupních a ovlivňujících veličin X_i .

(iii) **zdroje a typy nejistot, vyčíslení jednotlivých nejistot typu A i B**

U vstupních veličin, pro které je pravděpodobnostní rozdělení jejich hodnot známé nebo je lze předpokládat, stanovte očekávanou hodnotu veličiny a její standardní nejistotu typu A. Pro ty veličiny X_i , pro něž je známa pouze jedna hodnota (např. výsledky předchozích měření, opravné hodnoty, kalibrační koeficienty, hodnoty převzaté z literatury a pod.), stanovte

hodnotu standardní nejistoty typu B. Shrňte výsledky v podobě přehledu očekávaných hodnot a standardních nejistot vstupních a ovlivňujících veličin.

(iv) výpočet naměřené hodnoty výstupní veličiny

Dosazením očekávaných hodnot vstupních veličin x_i do konkrétní podoby vztahu (1) spočtete naměřenou hodnotu y výstupní (měřené) veličiny Y .

(v) stanovení kombinované standardní nejistoty naměřené hodnoty

a) Má-li rovnice modelu měření jednoduchý tvar (19) nebo (21), spočtete standardní nejistotu $u(y)$ naměřené hodnoty y podle vztahu (20) resp. (22-23).

b) Má-li rovnice modelu měření složitější tvar, spočtete koeficienty citlivosti podle vztahu (16). Pro každou vstupní veličinu X_i vypočtete pomocí vztahu (18) její příspěvek $u_i(y)$ k nejistotě naměřené hodnoty výstupní veličiny. Je-li možné zanedbat vzájemné korelace mezi vstupními veličinami, postupujte podle kapitoly 3.3.2 a druhou mocninu standardní nejistoty $u(y)$ stanovte jako součet druhých mocnin příspěvků od jednotlivých vstupních veličin podle vztahu (17). Pokud víte, že vstupní veličiny jsou korelované, postupujte v souladu s kapitolou 3.3.3 a pro výpočet nejistoty měření využijte obecný vztah (24).

(vi) stanovení rozšířené nejistoty

Vypočtete rozšířenou nejistotu $U(y)$ vynásobením standardní nejistoty $u(y)$ naměřené hodnoty výstupní veličiny příslušným koeficientem rozšíření k .

(vii) uvedení výsledku měření

Uveďte výsledek měření zahrnující naměřenou hodnotu y měřené veličiny, jemu příslušející rozšířenou nejistotu $U(y)$ a koeficient rozšíření k . Výsledek měření je možno zapsat různými způsoby, vždy však musí být ze zápisu jednoznačně zřejmé, jaká je naměřená hodnota, jaká je nejistota měření a k jaké pravděpodobnosti pokrytí se udaná nejistota vztahuje.

3.5 základní vztahy pro výpočet standardní nejistoty měření - přehledná tabulka

Tabulka č. 5: Výpočet standardní nejistoty pro některé jednoduché modelové funkce

	modelová funkce f	vztah pro výpočet standardní nejistoty měření
1	$y = x_1 + x_2$	$u^2(y) = u^2(x_1) + u^2(x_2)$
2	$y = x_1 - x_2$	
3	$y(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^N p_i \cdot x_i$	$u^2(y) = \sum_{i=1}^N p_i^2 \cdot u^2(x_i)$
4	$y = x_1 \cdot x_2$	$w^2(y) = w^2(x_1) + w^2(x_2)$
5	$y = x_1 / x_2$	
6	$y(x_1, x_2, \dots, x_N) = c \cdot \prod_{i=1}^N x_i^{p_i}$	$w^2(y) = \sum_{i=1}^N p_i^2 \cdot w^2(x_i)$
7	$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$	$u^2(y) = \sum_{i=1}^N c_i^2 \cdot u^2(x_i)$
8	$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ s korelacemi	$u^2(y) = \sum_{i=1}^N c_i^2 \cdot u^2(x_i) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N c_i \cdot c_j \cdot u(x_i) \cdot u(x_j) \cdot r_{ij}$

V případech uvedených v tabulce na řádcích č. 1 až č. 7 platí vztah v pravém sloupci tabulky pouze za předpokladu, že můžeme zanedbat korelace mezi vstupními veličinami. Není-li možno zanedbat korelace, musíme postupovat podle obecného vztahu na řádku č. 8.

4. Ilustrace postupu pro stanovení naměřené hodnoty a nejistoty měření na konkrétních příkladech

Na vybraných příkladech dozimetrických měření představených v kapitole 2 nyní budeme ilustrovat postup sestávající ze sedmi postupných kroků, který je uveden v kapitole 3.4 výše. Jednotlivé kroky budeme označovat postupně (i) až (vii) v souladu se značením v kapitole 3.4.

Jak již bylo psáno výše, není tato publikace primárně věnována konkrétnímu stanovení velikosti nejistot vstupních a ovlivňujících veličin při různých druzích dozimetrických měření. Na použitých příkladech si zde ale přesto ukážeme, jakým způsobem při stanovení těchto nejistot postupovat, abychom tak konkretizovali obecné postupy uvedené v předchozích kapitolách.

4.1 Příklad č. 1: Stanovení dávky ve vodě ve fotonovém svazku lineárního urychlovače v referenčních podmínkách pomocí ionizační komory.

(i) *model měření, možné korelace vstupních veličin*

Měření je popsáno vztahem (2):

$$D_w = M \cdot N_{D,w}(Q_0) \cdot k_{Q,Q_0} \cdot k_T \cdot k_p \cdot k_{el} \cdot \prod k_i$$

Měřená (výstupní) veličina dávka ve vodě, D_w , je v tomto případě vyjádřena jako součin vstupních veličin a dalších opravných faktorů. Jedná se o situaci popsanou rovnicí (21), budeme proto pracovat pouze s relativními nejistotami a výsledná kombinovaná relativní standardní nejistota bude určena vztahem (23). Vstupní a ovlivňující veličiny jsou takového druhu, že není důvod předpokládat existenci vzájemných korelací těchto veličin.

(ii) *známé korekce veličin X_i*

V tomto kroku by byly uplatněny případné systematické korekce měřených hodnot vstupních a ovlivňujících veličin. Budeme předpokládat, že ve zvoleném příkladu měření nejsou takové korekce prováděny.

(iii) *zdroje a typy nejistot, vyčíslení jednotlivých nejistot typu A i B*

Veličina č. 1: střední odezva elektrometru M

Střední odezva M je stanovena z *opakovaných měření* odezvy elektrometru, jedná se tedy o veličinu, jejíž nejistota je *typu A*. Standardní nejistotu $u(M)$ stanovíme podle vztahu (7). Jelikož bylo měření provedeno pouze pětkrát, použijeme opravný faktor k_A z Tabulky č. 4. Uvedený postup lze snadno provést v libovolném tabulkovém kalkulátoru, jak ukazuje následující tabulka.

Tabulka č. 6: Střední hodnota a nejistota typu A odezvy elektrometru

č. položky	označení položky	název	hodnota	jednotka
1	M_1	1. odečet	36.11	nC
2	M_2	2. odečet	36.04	nC
3	M_3	3. odečet	36.17	nC
4	M_4	4. odečet	36.02	nC
5	M_5	5. odečet	36.03	nC
6	M	aritmetický průměr	36.074	nC
7		výběrová směrodatná odchylka souboru	0.0643	nC
8		výběrová směrodatná odchylka aritmetického průměru M	0.0287	nC
9	k_A	oprava na malý počet měření	1.4	
10	$u_A(M)$	standardní nejistota aritmetického průměru M	0.0402	nC
11	$w_A(M)$	relativní standardní nejistota aritmetického průměru M	0.0011	

Pro relativní standardní nejistotu $w(M)$ střední hodnoty odezvy elektrometru M tedy dostáváme výsledek $w(M) = 1,1 \cdot 10^{-3}$.

Poznámka: V praxi se někdy může přihodit, že všechny hodnoty M_i indikované nějakým měřidlem jsou si rovny. Znamená to, že rozlišení měřidla není dostatečné k tomu, aby nám poskytlo informaci o pravděpodobnostním rozdělení hodnot měřené veličiny. V takovém případě bychom měli přejít na nižší měřicí rozsah nebo použít měřidlo s lepším rozlišením. Není-li to z nějakého důvodu možné, spočteme standardní nejistotu typu A $u_a(M)$ ze vztahu (9), do kterého coby rozdíl horního a dolního limitu ($a_+ - a_-$) dosadíme jedničku na posledním místě, které měřidlo indikuje.

Veličina č. 2: kalibrační koeficient ionizační komory pro kvalitu svazku Q_0

Hodnota kalibračního koeficientu $N_{D,w}(Q_0)$ pro kalibrační kvalitu svazku Q_0 (^{60}Co) je uvedena v **kalibračním listu** ionizační komory. Jedná se tedy o veličinu, jejíž nejistota je **typu B**. Kalibrační list udává, že platí $N_{D,w}(Q_0) = 5,418 \cdot 10^7 \text{ Gy/C}$. Dále je v kalibračním listu uvedeno: “Relativní nejistota kalibračního koeficientu je 2,0 %. Uvedená nejistota je součinem relativní standardní nejistoty měření a koeficientu k , který odpovídá pravděpodobnosti pokrytí přibližně 95 %, což pro normální rozdělení odpovídá koeficientu rozšíření $k = 2$.” Z údajů v kalibračním listu tedy vyplývá, že velikost relativní standardní nejistoty kalibračního koeficientu $N_{D,w}(Q_0)$ je $1,0 \cdot 10^{-2}$.

Veličina č. 3: opravný faktor na kvalitu měřeného svazku Q odlišnou od kvality Q_0

Opravný faktor k_{Q,Q_0} pro daný fotonový svazek lineárního urychlovače a použitou ionizační komoru nalezneme v doporučení [1]. Jedná se tedy o veličinu, jejíž nejistota je **typu B**. V tabulce č. 15 doporučení [1] je uvedena doporučená hodnota relativní standardní nejistoty tohoto faktoru $1,0 \cdot 10^{-2}$.

Veličina č. 6: oprava odezvy elektrometru

Oprava odezvy elektrometru k_{el} zahrnuje případné systematické korekce vyplývající například z kalibračního listu elektrometru nebo z obdobného dokumentu. Zde budeme tuto korekci považovat za rovnou jedné, $k_{el} = 1.00$, a zdá se tedy, že by mohla být z našich úvah vypuštěna.

Tento opravný faktor nám ale umožňuje zohlednit ještě jednu skutečnost, a to existenci vlastní (přístrojové) nejistoty odezvy elektrometru. V dokumentaci elektrometru je obvykle možno

najít kvantitativní informaci o *nejistotě* měření (measurement *uncertainty*) nebo o *přesnosti* (*accuracy*). Měříme-li například s elektrometrem Unidos E, můžeme najít v dokumentaci přístroje tento údaj: „**Přesnost měření proudu a náboje: $\leq(0,5 \% + 1 \text{ impuls})$** “. Jedná se o nejistotu **typu B**, která je do měření vnášena elektrometrem a není zatím v našich úvahách zohledněna. Tuto nejistotu by teoreticky mohla brát v úvahu kalibrační laboratoř, která stanovila hodnotu a celkovou nejistotu kalibračního koeficientu $N_{D,w}(Q_0)$. Obvykle ale kalibrační laboratoř tuto přístrojovou nejistotu kalibrovaného měřidla do výpočtu celkové nejistoty kalibračního koeficientu nezahrnuje, a proto musí být tato nejistota zahrnuta do výpočtu celkové nejistoty až uživatelem při měření.

Často je v dokumentaci dozimetrických měřidel uvedena *přesnost* přístroje bez upřesnění, v jakém vztahu ke *standardní nejistotě* měření typu B je tato *přesnost*. Pro náš vzorový výpočet není tato informace klíčová, v klinické praxi bychom si ale raději měli toto upřesnění vyžádat od výrobce nebo dodavatele měřidla. Zcela nezbytné by to bylo v situaci, kdy by tato dílčí nejistota byla významnou nebo dokonce dominantní položkou v celkové bilanci nejistot (v našem vzorovém příkladu tomu tak není).

V našem vzorovém výpočtu budeme pro jednoduchost předpokládat, že výrobcem udaná *přesnost* je rovna rozšířené nejistotě s pravděpodobností pokrytí cca 95 %. Za standardní nejistotu budeme tedy považovat polovinu hodnoty udávané výrobcem. Ve výpočtu musíme zohlednit, že tato nejistota má jak pevnou část nezávislou na odezvě (1 impuls), tak i proměnlivou část závislou na odezvě (0,5 % odezvy).

Postup a výsledek výpočtu ukazuje následující tabulka.

Tabulka č. 7: Nejistota opravného faktoru odezvy elektrometru k_{el}

č. položky	označení položky	název	hodnota	jednotka
1	M	střední hodnota odečtu (nC)	36.074	nC
2	$u_{B1}(M)$	0.5 % ze střední odezvy M/2 (první složka nejistoty typu B)	0.0902	nC
3	$u_{B2}(M)$	"1 count/2" (druhá složka nejistoty typu B)	0.0050	nC
4	$u_B(M)$	standardní nejistota typu B (součet nejistot u_{B1} a u_{B2})	0.0952	nC
5	$w(k_{el})$	relativní standardní nejistota typu B	0.0026	

Vidíme, že pevná složka nejistoty (položka 3) se v našem příkladu do celkové nejistoty prakticky nepromítne, protože je řádově menší než proměnlivá složka nejistoty (položka 2). Pokud by ale byla měřená hodnota dávky (a tedy i odezva elektrometru) desetkrát menší než v našem příkladu, pevná složka nejistoty by už celkovou nejistotu odezvy elektrometru znatelně ovlivňovala.

Takto spočtená hodnota relativní standardní nejistoty opravného faktoru odezvy elektrometru $w(k_{el})$ je v dobré shodě s hodnotou relativní standardní nejistoty 0,3 %, která je uvedena jako obecně doporučená hodnota pod názvem „*Dlouhodobá stabilita uživatelského referenčního dozimetru*“ (v originále „*Long term stability of user dosimeter*“) v tabulce 15 dokumentu [1].

Veličiny č. 4 (oprava na teplotu vzduchu), č. 5 (oprava na tlak vzduchu) a č. 7 (součin ostatních opravných faktorů):

Do opravných faktorů k_T , k_p a dalších nespecifikovaných opravných faktorů k_i se promítá vliv teploty a tlaku vzduchu v ionizační komoře, vliv nejistoty v nastavení polohy fantomu a ionizační komory a vlivy dalších ovlivňujících veličin X_i . V dokumentu [1] je v tabulce 15

uvedena doporučená typická souhrnná hodnota **0,4 %** pro relativní standardní nejistotu vnášenou do měření těmito dalšími veličinami. Pokud pracujeme s pravidelně kalibrovanými měřidly tlaku a teploty a pokud i další podmínky měření odpovídají požadavkům uvedeným v kapitole 6.8 dokumentu [1], pak můžeme pro výpočet celkové nejistoty měření použít tuto hodnotu. Jedná se o nejistotu *typu B*.

(iv) výpočet hodnoty měřené veličiny

Dosazením hodnot vstupních veličin do rovnice modelu spočteme naměřenou hodnotu **$D_w = 2.00 \text{ Gy}$** .

Tabulka č. 8: Hodnoty vstupních veličin a naměřená hodnota výstupní veličiny

proměnná	označení	název veličiny	hodnota	jednotka
X1	M	střední odezva elektrometru	36.074	nC
X2	$N_{D,w}(Q_0)$	kalibrační koeficient ionizační komory pro kvalitu svazku Q_0	5.418E+07	Gy/C
X3	k_{Q,Q_0}	opravný faktor na kvalitu měřeného svazku Q odlišnou od kvality Q_0 ([1], Tabulka č. 14)	0.988	
X4	k_{el}	oprava odezvy elektrometru	1.000	
X5	k_p	oprava na tlak vzduchu	1.028	
X6	k_T	oprava na teplotu vzduchu	1.007	
X7	$\prod k_i$	součin ostatních opravných faktorů	1.000	
Y	D_w	dávka ve vodě	2.00	Gy

(v) stanovení kombinované standardní nejistoty naměřené hodnoty

Následující tabulka shrnuje výše odvozené hodnoty dílčích relativních standardních nejistot. Výslednou kombinovanou relativní standardní nejistotu $w(D_w)$ naměřené hodnoty dávky ve vodě D_w získáme jako kvadratický součet všech jednotlivých relativních standardních nejistot typu A i typu B. Výsledná hodnota kombinované relativní standardní nejistoty měření je **$1,5 \cdot 10^{-2}$** .

Tabulka č. 9: Souhrnná tabulka s přehledem standardních nejistot pro příklad č. 1

název nejistoty; zdroj informací o nejistotě	označení relativní standardní nejistoty	typ nejistoty	hodnota
nejistota střední odezvy elektrometru Zdroj: statistická analýza měřených hodnot	$w(M)$	A	1.1E-03
nejistota kalibračního koeficientu $N_{D,w}(Q_0)$ Zdroj: kalibrační list ionizační komory	$w(N_{D,w})$	B	1.0E-02
nejistota opravného faktoru na kvalitu svazku Zdroj: [1], Tabulka č. 15	$w(k_{Q,Q_0})$	B	1.0E-02
přístrojová nejistota odezvy elektrometru Zdroj: dokumentace výrobce elektrometru	$w(k_{el})$	B	2.5E-03
souhrnná nejistota dalších opravných faktorů Zdroj: [1], Tabulka č. 15	$w(\prod k_i)$	B	4.0E-03
kombinovaná relativní standardní nejistota měření	$w(D_w)$	kombinovaná	1.5E-02

Z této tabulky a z celého příkladu vidíme, že do výpočtu kombinované standardní nejistoty měření vstupují dílčí nejistoty $u(x_i)$ typu A i typu B stejným způsobem, protože výsledná kombinovaná standardní nejistota měření $u(y)$ je rovna kvadratickému součtu všech dílčích nejistot $u_i(y)$, ať už jsou tyto dílčí nejistoty $u_i(y)$ spočteny z nejistot $u(x_i)$ typu A nebo typu B. Určení typu A nebo B konkrétních nejistot $u(x_i)$ v kroku (iii) našeho postupu bylo důležité pro správné stanovení velikostí těchto nejistot, ale v dalších výpočtech, tedy v krocích (v-vii) už je se všemi dílčími nejistotami nakládáno stejným způsobem.

Vzhledem k rovnocennosti všech dílčích nejistot z hlediska jejich vlivu na výslednou nejistotu měření bychom proto byli mohli v tomto našem příkladu použít již od začátku mírně odlišný přístup, ve kterém bychom vůbec nezaváděli proměnnou X_4 (opravný faktor odezvy elektrometru k_{el}). Místo toho bychom přístrojovou nejistotu odezvy elektrometru „0,5 % + 1 impuls“ interpretovali jako nejistotu typu B proměnné X_1 (střední odezva elektrometru M). Kombinovanou standardní nejistotu $u_c(x_1)$ hodnoty proměnné X_1 bychom pak spočetli podle vztahu (10) jako kvadratický součet jejich standardních nejistot typu A a B.

Oba přístupy, tedy jak námi použitý přístup tak i zmíněný alternativní postup jsou metodicky správné a jejich výsledek je číselně totožný.

(vi) stanovení rozšířené nejistoty naměřené hodnoty

Není důvod předpokládat, že měřená veličina má jiné než normální (Gaussovo) rozdělení. Použijeme proto hodnotu koeficientu rozšíření $k = 2$, rozšířená relativní nejistota měření bude $3,0 \cdot 10^{-2}$.

(vii) *uvedení výsledku měření*

Pro naměřenou hodnotu D_w dávky ve vodě v referenčních podmínkách ve svazku fotonového záření lineárního urychlovače platí $D_w = (2,00 \pm 0,06) \text{ Gy}$. Uvedená nejistota je nejistotou rozšířenou ($k = 2$) a odpovídá pravděpodobnosti pokrytí přibližně 95 %.

4.2 Příklad č. 2: Stanovení kermové vydatnosti radionuklidového zdroje ^{192}Ir v brachyterapii.

(i) *model měření, možné korelace vstupních veličin*

Měření je popsáno vztahem (3):

$$\dot{K}_{ref} = M \cdot N_{k,lr} \cdot k_T \cdot k_p \cdot k_{el} \cdot F_{tr} \cdot F_{gr} \cdot F_{rs} \cdot F_{att} \cdot (z/d_{ref})^2 \cdot t^{-1} \cdot \prod_i k_i$$

Měřenou (výstupní) veličinou je příkon kermy ve vzduchu v referenční vzdálenosti. Měřená veličina v tomto případě závisí na vstupních veličinách mírně složitějším způsobem, při výpočtu nejistoty měření budeme proto postupovat s využitím obecných vztahů (17) a (18).

Ze vztahu popisujícího model měření také ihned vidíme, že existují zjevné korelace mezi některými vstupními veličinami. Za jinak neměnných podmínek bude odezva elektrometru M klesat s druhou mocninou vzdálenosti z , tedy platí $M \approx 1/z^2$, a odezva M bude také vzrůstat přímo úměrně době měření t . Mezi odezvou elektrometru M a těmito dvěma veličinami tedy existuje nejen korelace, ale přímo funkční závislost. Jiné korelace mezi vstupními veličinami modelu nebudeme předpokládat.

Pro ilustraci vlivu korelace provedeme výpočet nejistoty v obou variantách, nejprve bez započtení vlivu korelace podle vztahu (17), a poté podle vztahu (24) s uvážením korelací.

(ii) *známé korekce veličin X_i*

Budeme předpokládat, že nejsou známy žádné systematické korekce vstupních veličin.

(iii) *zdroje a typy nejistot, vyčíslení jednotlivých nejistot typu A i B*

Veličina č. 1: střední odezva elektrometru M

Postup bude stejný jako v příkladu č. 1. Střední odezva M je stanovena z *opakovaných měření* odezvy elektrometru, jedná se tedy o veličinu, jejíž nejistota je *typu A*. Standardní nejistotu $u(M)$ stanovíme podle vztahu (7). Jelikož bylo měření provedeno pouze šestkrát, použijeme opravný faktor k_A z Tabulky č. 4. Výsledek výpočtu ukazuje následující tabulka.

Tabulka č. 10: Střední hodnota a nejistota typu A odezvy elektrometru pro příklad č. 2

č. položky	označení položky	název	hodnota	jednotka
1	M_1	1. odečet	1.183	nC
2	M_2	2. odečet	1.185	nC
3	M_3	3. odečet	1.180	nC
4	M_4	4. odečet	1.172	nC
5	M_5	5. odečet	1.175	nC
6	M_6	6. odečet	1.173	nC
7	M	aritmetický průměr	1.178	nC
8		výběrová směrodatná odchylka souboru	0.0054	nC
9		výběrová směrodatná odchylka aritmetického průměru M	0.0022	nC
10	k_A	oprava na malý počet měření	1.3	
11	$u_A(M)$	standardní nejistota aritmetického průměru M	0.0029	nC
12	$w_A(M)$	relativní standardní nejistota aritmetického průměru M	0.0025	

Veličina č. 2: interpolovaný kalibrační koeficient ionizační komory pro kvalitu svazku ^{192}Ir

Při stanovení hodnoty kalibračního koeficientu ionizační komory pro záření zdroje ^{192}Ir budeme vycházet z kapitoly 6.4.2 doporučení [2], v níž je uveden empirický vztah

$$N_{K, Ir} = 0.8 \cdot N_{K, 250kV} + 0.2 \cdot N_{K, Co} \quad , \quad (25)$$

kde $N_{K, 250kV}$ a $N_{K, Co}$ jsou kalibrační koeficienty použité ionizační komory stanovené kalibrační laboratoří pro rentgenový svazek 250 kV s definovanou filtrací a pro radionuklidový svazek ^{60}Co . Kalibrační koeficient $N_{K, Ir}$ pro záření zdroje ^{192}Ir je spočten lineární interpolací z hodnot kalibračních koeficientů pro vyšší a nižší energii fotonů, jedná se tedy o situaci, která je popsána výše v kapitole 3.1.4.

Pro náš ilustrační výpočet budeme předpokládat, že v kalibračních listech jsou udány tyto hodnoty a relativní standardní nejistoty kalibračních koeficientů: $N_{K, 250kV} = 4,06 \cdot 10^{-2} \text{ Gy/nC}$ s relativní standardní nejistotou 1,0 % a $N_{K, Co} = 4,12 \cdot 10^{-2} \text{ Gy/nC}$ s relativní standardní nejistotou 0,6 %. Při výpočtu budeme vycházet ze vztahů (12) až (15) uvedených v kapitole 3.1.4. Hodnoty Langrangeových polynomů prvního řádu v daném vnitřním bodě intervalu jsou rovny relativním vzdálenostem tohoto bodu od koncových bodů intervalu, v němž interpolace probíhá. Pro náš případ bude tedy platit $L1 = 0,8$ a $L2 = 0,2$.¹

Výsledek výpočtu hodnoty a nejistoty interpolovaného kalibračního koeficientu je uveden v následující tabulce. Nejistota je **typu B**.

¹ Postup uvedený v doporučení [2] není plně vnitřně konzistentní, protože výpočet váženého průměru kermových kalibračních koeficientů v kapitole 6.4.2 doporučení IAEA je prováděn pro bod s efektivní energií 355 keV, zatímco efektivní energie zářiče ^{192}Ir uvedená v tomtož doporučení je 397 keV. Pro účely našeho vzorového výpočtu je ale tato drobná nedůslednost nepodstatná a budeme zde všechny výpočty provádět v souladu s postupem uvedeným v kapitole 6.4.2 uvedeného doporučení IAEA.

Tabulka č. 11: Výpočet kalibračního koeficientu $N_{K,Ir}$ a jeho standardní nejistoty

název svazku	250 kV	60 Co	(0.8*250 kV) + (0.2*60Co)
kvalita svazku (efektivní keV)	131	1250	355
kalibrační koeficient $N_{K,a}$ (Gy/nC)	4.06E-02	4.12E-02	4.07E-02
relativní standardní nejistota kalibračního koeficientu	1.0E-02	6E-03	
standardní nejistota kalibračního koeficientu (Gy/nC)	4.1E-04	2.5E-04	
hodnota L1 v bodě E=355 keV			0.8
hodnota L2 v bodě E=355 keV			0.2
standardní nejistota kalibračního koeficientu podle vztahu (12)			3.7E-04
standardní nejistota kalibračního koeficientu podle vztahu (13)			3.3E-04

Pokud byly hodnoty kalibračních koeficientů $N_{K,250kV}$ a $N_{K,Co}$ získány v různých kalibračních laboratořích, můžeme předpokládat jejich nezávislost a použít hodnotu nejistoty spočtenou podle vztahu (15). Pokud obě hodnoty pocházejí z jednoho kalibračního listu, bylo by správnější použít pro další výpočty nejistotu spočtenou podle vztahu (14). Vidíme, že předpoklad o vzájemné nezávislosti hodnot, mezi kterými interpolujeme, vede k mírnému zmenšení nejistoty interpolované hodnoty.

Veličiny č. 3 a 4: opravné faktory na podmínky prostředí k_T a k_p

Nejistoty těchto veličin obvykle určujeme z kalibračních listů teploměru a tlakoměru a jsou proto **typu B**. V našem výpočtu budeme počítat se standardními nejistotami opravných faktorů $u(k_T)=1,7 \cdot 10^{-3}$ a $u(k_p)=1,0 \cdot 10^{-3}$, což odpovídá standardní nejistotě hodnot teploty vzduchu a tlaku vzduchu $0,5 K$ a $1 hPa$.

Veličina č. 5: oprava odezvy elektrometru k_{el}

Stejně jako v příkladu č. 1 využijeme tento opravný faktor k tomu, abychom do bilance nejistot započítali i vlastní nejistotu odezvy elektrometru. Předpokládáme, že měření bylo provedeno stejným typem měřidla jako v příkladu č. 1, tedy že výrobcem udaná nejistota odezvy je „0,5 % + 1 impuls“ a že se jedná o rozšířenou nejistotu ($k=2$). Nejistota je **typu B**.

Veličiny č. 6 (F_{ir} , oprava na tranzitní čas při pohybu zdroje), č. 7 (F_{gr} , oprava na nehomogenní elektronovou fluenci v ionizační komoře), č. 8 (F_{rs} , oprava na přídatné ionizace z rozptylu na okolním materiálu) a č. 9 (F_{att} , oprava na zeslabení primárních fotonů ve vzduchu):

Nejistoty těchto opravných faktorů jsou nejistotami **typu B**. Blíže se zde hodnotami ani nejistotami těchto opravných faktorů nebudeme zabývat, jejich hodnotu a velikost je možno pro konkrétní měřicí geometrii a ionizační komoru dohledat v doporučení [2] a v další odborné literatuře. Pro naše ilustrační výpočty položíme hodnoty těchto čtyř opravných faktorů rovny jedné a jejich nejistotu zahrneme do nejistoty proměnné č. 13.

Veličina č. 10: vzdálenost ionizační komory od zdroje

Údaj o nejistotě vzdálenosti mezi středem ionizační komory a zdrojem záření můžeme získat z dokumentace dodané k měřicímu můstku (v tom případě bude tato nejistota typu B), nebo bychom mohli tuto vzdálenost opakovaně měřit přesným měřidlem a naměřené hodnoty statisticky vyhodnotit (v takovém případě by se jednalo o nejistotu typu A). Pro náš výpočet

budeme předpokládat, že standardní nejistota této vzdálenosti je **typu B** a její velikost je **0,5 mm**.

Veličina č. 11: referenční vzdálenost pro výpočet kermové vydatnosti

Tato veličina ve skutečnosti není proměnnou veličinou, ale je to konstantní definovaná vzdálenost, jejíž nejistota je rovna nule.

Veličina č. 12: doba měření

V dokumentaci měřidla Unidos není možno zjistit, jaká je nejistota doby integrace náboje. Velikost této nejistoty by bylo možno zjistit dotazem u dodavatele nebo výrobce. Pro náš ilustrační výpočet budeme předpokládat, že standardní nejistota doby měření je **0,5 ms**. Jedná se o nejistotu **typu B**.

Veličina č. 13: součin dalších opravných faktorů

Do této souhrnné položky zahrnujeme ty opravné faktory, o kterých je možno předpokládat, že velikost relativní standardní nejistoty $w(x_i)$ žádného z těchto faktorů nepřesáhne hodnotu $1 \cdot 10^{-3}$. Je-li počet těchto faktorů N , pak za využití vztahů (21-23) odhadneme, že relativní standardní nejistota jejich součinu nepřesáhne hodnotu $\sqrt{N} \cdot 10^{-3}$.

(iv) **výpočet hodnoty měřené veličiny**

Hodnoty vstupních veličin a jejich nejistoty jsou shrnuty v následující tabulce. Naměřená hodnota kermové vydatnosti zdroje ^{192}Ir je $K_{ref} = 46,5 \text{ mGy/hod}$.

Tabulka č. 12: Hodnoty a standardní nejistoty vstupních veličin pro příklad č. 2

proměnná	označení	název veličiny	číselná hodnota	jednotka	standardní nejistota	jednotka	standardní relativní nejistota	typ nejistoty
X1	M	odezva elektrometru	1.178	nC	2.9E-03	nC	2.5E-03	A
X2	$N_{k,ir}$	interpolovaný kalibrační koeficient ionizační komory pro kvalitu svazku 192Ir	4.073E-02	Gy/nC	3.3E-04	Gy/nC	8.0E-03	B
X3	k_T	oprava na teplotu vzduchu	1.007		1.7E-03		1.7E-03	B
X4	k_p	oprava na tlak vzduchu	1.049		1.0E-03		1.0E-03	B
X5	k_{el}	systematická oprava odezvy elektrometru	1.000		2.9E-03		2.9E-03	B
X6	F_{tr}	oprava na tranzitní čas při pohybu zdroje	1.000					
X7	F_{gr}	oprava na nehomogenní elektronovou fluenci v komoře	1.009					
X8	F_{is}	oprava na přidatné ionizace z rozptylu na okolním materiálu	1.000					
X9	F_{att}	oprava na zeslabení svazku ve vzduchu	1.001					
X10	z	vzdálenost ionizační komory od zdroje	0.123	m	5.0E-04	m	4.1E-03	B
X11	d_{ref}	referenční vzdálenost pro výpočet kermové vydatnosti	1.000	m	---	---	---	---
X12	t	doba měření	60.0	s	5.0E-04	s	8.3E-06	B
X13	Π_{ki}	součin ostatních opravných faktorů	1.000		2.0E-03		2.0E-03	B
	K_{ref}	kermová vydatnost zdroje	46.5	mGy/hod				

(v) *stanovení kombinované standardní nejistoty odhadu hodnoty měřené veličiny*

Model měření popsaný vztahem (3) nemá jednoduchý tvar součtu nebo součinu vstupních veličin. Při výpočtu nejistoty měření se zanedbáním korelací vstupních veličin proto budeme postupovat podle vztahů (16 – 18). Zpřesněný výpočet nejistoty měření se započtením vlivu korelací spočteme podle vztahu (24).

Pro vyčíslení nejistoty měření podle vztahů (16-18) a (24) potřebujeme znát hodnoty **koeficientů citlivosti** c_i , které jsou rovny hodnotám **parciálních derivací** $\partial f/\partial x_i$ modelové funkce v daném bodě. Tyto parciální derivace můžeme spočítat a vyčíslit buď analyticky nebo numericky pomocí diference modelové funkce ve dvou blízkých bodech.

Výhodou analytického výpočtu je jeho univerzálnost a přesnost, nevýhodou může být větší pracnost.

Při numerickém výpočtu zvolíme pro každou proměnnou X_i vhodnou velikost přírůstku (inkrementu) této proměnné Δx_i a následně spočteme přibližnou hodnotu parciální derivace funkce f v bodě výpočtu například takto:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial X_i} \right|_{X_1=x_1, \dots, X_N=x_N} \approx \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_N) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N)}{\Delta x_i} \quad (26)$$

Můžeme samozřejmě v literatuře vyhledat a použít i přesnější varianty vztahu (26) pro numerický výpočet hodnoty derivace funkce v bodě. Pro účely stanovení koeficientů citlivosti při klinických dozimetrických měřeních je ale přesnost vztahu (26) zcela postačující. Velikost přírůstku Δx_i vstupní proměnné X_i je ovšem nutno zvolit tak, aby přírůstek Δx_i byl řádově shodný s velikostí standardní nejistoty příslušné proměnné nebo menší, protože potřebujeme zmapovat chování modelové funkce f při změnách vstupní veličiny X_i uvnitř jejího intervalu nejistoty.

Postup a výsledek přibližného numerického výpočtu koeficientu citlivosti c_I pro proměnnou X_I (střední odezva elektrometru) ukazuje následující tabulka. Jako velikost kroku proměnné X_I byla zvolena jedna setina hodnoty této proměnné v bodě výpočtu. Hodnoty vstupních proměnných a výsledků výpočtů v posunutém bodě výpočtu jsou označeny kurzívou a podbarveny šedou barvou.

Tabulka č. 13: Numerický výpočet parciální derivace $\partial f/\partial x_i$ pro příklad č. 2

proměnná	označení	název veličiny	hodnota v bodě (x_1, x_2, \dots, x_N)	jednotka	hodnota v bodě ($x_1+\Delta x_1, x_2, \dots, x_N$)	jednotka
X1	M	odezva elektrometru	1.178	nC	1.190	nC
X2	$N_{k,1r}$	interpolovaný kalibrační koeficient ionizační komory pro kvalitu svazku 192Ir	4.073E-02	Gy/nC	4.073E-02	Gy/nC
X3	k_T	oprava na teplotu vzduchu	1.007		1.007	
X4	k_p	oprava na tlak vzduchu	1.049		1.049	
X5	k_{el}	systematická oprava odezvy elektrometru	1.000		1.000	
X6	F_{tr}	oprava na tranzitní čas při pohybu zdroje	1.000		1.000	
X7	F_{gr}	oprava na nehomogenní elektronovou fluenci v komoře	1.009		1.009	
X8	F_{rs}	oprava na přídavné ionizace z rozptylu na okolním materiálu	1.000		1.000	
X9	F_{att}	oprava na zeslabení svazku ve vzduchu	1.001		1.001	
X10	z	vzdálenost ionizační komory od zdroje	0.123	m	0.123	m
X11	d_{ref}	referenční vzdálenost pro výpočet kermové vydatnosti	1.000	m	1.000	m
X12	t	doba měření	60.0	s	60.0	s
X13	Π_{ki}	součin ostatních opravných faktorů	1.000		1.000	
	K_{ref}	kermová vydatnost zdroje	46.48	mGy/hod	46.94	mGy/hod
	c_1	koeficient citlivosti pro proměnnou X1	39.5	(mGy/hod)/nC		

Je třeba vždy pamatovat na to, že hodnota koeficientu citlivosti c_i je rovna hodnotě parciální derivace funkce f podle proměnné X_i v **bodě výpočtu**. Nejde tedy o charakteristiku, která by udávala jakousi obecnou citlivost modelové rovnice vůči malé změně dané vstupní proměnné, ale hodnota tohoto koeficientu je vždy vztažena ke konkrétnímu bodu výpočtu. V našem příkladu vychází hodnota koeficientu citlivosti v bodě výpočtu $c_1 = 39,5 \text{ (mGy/hod)/nC}$. Pro jinou kombinaci hodnot vstupních proměnných, tedy pro jiný bod výpočtu, bychom ale obecně obdrželi jinou hodnotu koeficientu citlivosti.

Obdobně jako pro vstupní proměnnou X_1 spočteme hodnoty parciálních derivací v bodě výpočtu i pro ostatní vstupní proměnné. Následující tabulka shrnuje výsledky tohoto přibližného výpočtu pro proměnné X_1, X_2, X_{10} a X_{12} . Hodnoty pro ostatní proměnné zde neuvádíme. V tabulce je také uvedena výsledná nejistota spočtená podle vztahu (17), tedy bez uvážení vzájemných korelací vstupních veličin.

Tabulka č. 14: Kombinovaná standardní nejistota pro příklad č. 2 bez uvážení korelací vstupních veličin

proměnná	označení	číselná hodnota x_i	jednotka	standardní nejistota $u(x_i)$	jednotka	koeficient citlivosti c_i	jednotka	příspěvek k výsledné nejistotě $u_i(y) = c_i \cdot u(x_i)$	jednotka	$[u_i(y)]^2$	jednotka
X1	M	1.178	nC	2.9E-03	nC	39.5	(mGy/hod)/nC	0.116	mGy/hod	1.35E-02	(mGy/hod) ²
X2	$N_{k,ir}$	4.073E-02	Gy/nC	3.3E-04	Gy/nC	1141	(mGy/hod)/(Gy/nC)	0.372	mGy/hod	1.38E-01	(mGy/hod) ²
...											
X10	z	0.123	m	5.0E-04	m	46.5	(mGy/hod)/m	0.023	mGy/hod	5.40E-04	(mGy/hod) ²
...											
X12	t	60.0	s	5.0E-03	s	-0.767	(mGy/hod)/s	-0.004	mGy/hod	1.47E-05	(mGy/hod) ²
...											
Výpočet kombinované standardní nejistoty měření											
							$\Sigma [u_i(y)]^2$			0.152	(mGy/hod) ²
							Kombinovaná standardní nejistota měření			0.39	mGy/hod

V kroku (i) v tomto řešeném příkladu č. 2 jsme identifikovali silnou korelaci mezi veličinami X_1 a X_{10} (tedy M a z) a mezi veličinami X_1 a X_{12} (tedy M a t). Pro vyčíslení vlivu této korelace na nejistotu měření musíme použít vztah (24) a do výpočtu hodnoty $u^2(y)$ zahrnout i kombinované součiny $c_i \cdot c_j \cdot u(x_i) \cdot u(x_j) \cdot r_{ij}$, kde r_{ij} jsou hodnoty korelačních koeficientů. Jak již bylo řečeno výše, mezi střední odezvou elektrometru M a veličinami t , respektive z , existuje funkční závislost. V případě doby měření t jde o závislost tvaru $M(t) = konst \cdot t$, v případě vzdálenosti z se jedná o závislost tvaru $M(z) = M(z_0) \cdot (z_0/z)^2$.

U přímé úměry $M = konst \cdot t$ je zřejmé, že hodnota korelačního koeficientu bude +1, neboť s rostoucí hodnotou veličiny t roste přímo úměrně hodnota veličiny M .

U závislosti tvaru $M \approx 1/z^2$ není na první pohled zřejmé, jaká bude hodnota korelačního koeficientu. Musíme si ale uvědomit, že pro účely stanovení nejistoty měření studujeme chování modelové funkce f pouze v malém okolí bodu, v němž je hodnota funkce f vyčíslena. Proto je pro nás relevantní pouze chování funkce f při takových změnách hodnot vstupních proměnných, které jsou řádově srovnatelné s velikostí příslušných nejistot nebo menší. U proměnné X_{10} (vzdálenost z) používáme pro výpočet hodnotu standardní nejistoty $5 \cdot 10^{-4}$ m, což odpovídá relativní nejistotě $4,1 \cdot 10^{-3}$. Pro takto malé relativní rozmezí hodnot proměnné z je možno průběh funkce $M \approx 1/z^2$ velmi dobře aproximovat klesající lineární závislostí. Korelační koeficient mezi proměnnými M a z na malém okolí bodu, v němž je funkce f vyčíslena, proto bude mít hodnotu velice blízkou -1.

Následující tabulka ukazuje vliv započtení korelací na hodnotu nejistoty měření.

Tabulka č. 15: Kombinovaná standardní nejistota pro příklad č. 2 s uvážením korelací vstupních veličin

proměnná	označení	číselná hodnota x_i	jednotka	standardní nejistota $u(x_i)$	jednotka	koeficient citlivosti c_i	jednotka	příspěvek k výsledné nejistotě $u_i(y) = c_i \cdot u(x_i) $	jednotka	$[u_i(y)]^2$	jednotka	
X1	M	1.178	nC	2.9E-03	nC	39.5	(mGy/hod)/nC	0.116	mGy/hod	1.35E-02	(mGy/hod) ²	
X2	$N_{k, Ir}$	4.073E-02	Gy/nC	3.3E-04	Gy/nC	1141	(mGy/hod)/(Gy/nC)	0.372	mGy/hod	1.38E-01	(mGy/hod) ²	
...												
X10	z	0.123	m	5.0E-04	m	46.5	(mGy/hod)/m	0.023	mGy/hod	5.40E-04	(mGy/hod) ²	
...												
X12	t	60.0	s	5.0E-03	s	-0.767	(mGy/hod)/s	-0.004	mGy/hod	1.47E-05	(mGy/hod) ²	
...												
Výpočet kombinované standardní nejistoty měření												
										$\Sigma [u_i(y)]^2$	0.152	(mGy/hod) ²
										$2 \cdot u_1(y) \cdot u_{10}(y) \cdot r_{1,10}$	-0.005	(mGy/hod) ²
										$2 \cdot u_1(y) \cdot u_{12}(y) \cdot r_{1,12}$	-0.001	(mGy/hod) ²
										Kombinovaná standardní nejistota měření	0.38	mGy/hod

Vidíme, že započtení korelací vedlo pouze k malému, prakticky zanedbatelnému snížení nejistoty měření.

(vi) *stanovení rozšířené nejistoty naměřené hodnoty*

Stejně jako v příkladu č. 1 není důvod předpokládat, že měřená veličina má jiné než normální (Gaussovo) rozdělení. Použijeme proto hodnotu koeficientu rozšíření $k = 2$, rozšířená nejistota měření bude přibližně **0,8 mGy/hod**.

(vii) *uvedení výsledku měření*

Pro naměřenou hodnotu \dot{K}_{ref} kermové vydatnosti zdroje záření ^{192}Ir platí $\dot{K}_{ref} = (46,5 \pm 0,8) \text{ mGy/hod}$. Uvedená nejistota je nejistotou rozšířenou ($k = 2$) a odpovídá pravděpodobnosti pokrytí přibližně 95 %.

4.3 Příklad č. 3: Stanovení první polotloušťky $d_{1/2}$ rentgenového svazku.

V příkladu použijeme hodnoty ze skutečného měření polotloušťky svazku s kvalitou RQR 5 (viz např. [6], kapitola 6.5.2). Pro tuto kvalitu svazku jsou při měření polotloušťky $d_{1/2}$ používány hliníkové filtry, budeme zde tedy mluvit konkrétně o tloušťkách filtrů v mm Al.

(i) *model měření, možné vzájemné korelace vstupních veličin*

Model měření – viz vztah (4)

$$d_{1/2} = \frac{t_b \cdot \ln(2E_a / E_0) - t_a \cdot \ln(2E_b / E_0)}{\ln(E_a / E_b)}$$

Možné vzájemné korelace vstupních veličin

Připomeňme si tabulku s přehledem vstupních veličin modelu.

Tabulka č. 16: Přehled veličin modelu pro Příklad č. 3

	<i>označení</i>	<i>název</i>	<i>jednotka</i>
Y	$d_{1/2}$	první polotloušťka rtg svazku	mm Al
X_1	E_0	kerma měřená bez přídavných filtrů	Gy
X_2	E_a	kerma nejbližší vyšší než $E_0/2$, změřená při tloušťce filtru t_a	Gy
X_3	E_b	kerma nejbližší nižší než $E_0/2$, změřená při tloušťce filtru t_b	Gy
X_4	t_a	tloušťka filtru pro změřenou kermu E_a	mm Al
X_5	t_b	tloušťka filtru pro změřenou kermu E_b	mm Al

Mezi tloušťkou filtru t a měřenou kermou E nepochybně existuje silná korelace, přesněji řečeno funkční závislost. Pokud se nemění ostatní faktory, pak zvětšení tloušťky filtru vede ke zmenšení měřené hodnoty kermy. Na existenci této funkční závislosti je ostatně celá metoda měření polotloušťky založena. Při výpočtu kombinované nejistoty měřené hodnoty polotloušťky bychom proto měli vliv této korelace zohlednit. Jedná se o korelaci mezi proměnnými E_a a t_a , a mezi proměnnými E_b a t_b . Jiné korelace mezi vstupními veličinami modelu nebudeme předpokládat. Stejně jako v předchozím příkladu ukážeme výpočet nejistoty v obou variantách, nejprve bez započtení vlivu korelace a poté se započtením korelace.

Pro přesnost bychom měli poznamenat, že skutečné tloušťky filtrů v klinické dozimetrické praxi většinou neznáme, neboť známe pouze výrobcem deklarovanou nominální tloušťku a její deklarovanou nejistotu. Tloušťka t , kterou dosazujeme do vztahu (4), tedy obvykle není tloušťkou skutečnou, ale tloušťkou nominální.

(ii) *známé korekce veličin X_i*

Budeme předpokládat, že nejsou známy žádné systematické korekce vstupních veličin.

(iii) *zdroje a typy nejistot, vyčíslení jednotlivých nejistot typu A i B*

Veličina č. 1: E_0 , kerma měřená bez přídavných filtrů

Ve srovnání s předchozími příklady je zde situace odlišná v tom, že vstupními veličinami modelu (4) jsou hodnoty veličiny kerma ve vzduchu. Tyto hodnoty a jejich kombinované nejistoty jsou získány měřením za pomoci ionizační komory a elektrometru a následnými výpočty, tedy obdobným postupem, jako je stanovena výstupní veličina dávka ve vodě D_w v příkladu č. 1 výše. Veličina kerma ve vzduchu nám tedy při měření polotloušťky svazku slouží jako mezičlánek; nejprve musí být její hodnota včetně nejistoty stanovena postupem jako v příkladu č. 1, aby mohla poté posloužit jako vstupní veličina v modelu měření polotloušťky. Bylo by sice v principu možné rozepsat vztah (4) tak, aby obsahoval pouze přímo měřené veličiny (náboj, teplota, tlak, kalibrační koeficient ionizační komory, ...), ale takovýto postup by nebyl příliš praktický.

Je-li hodnota kermy E_0 měřena pouze jednou, bude její nejistota typu B. Pokud bychom hodnotu kermy E_0 měřili opakovaně a pro výpočet polotloušťky použili její střední hodnotu, interpretovali bychom její nejistotu jako nejistotu typu A. Klasifikace typu nejistoty (A nebo B) ale nijak neovlivní další výpočty, protože výsledná nejistota hodnoty měřené veličiny $d_{1/2}$ je vždy odvozena z kvadratického součtu všech dílčích nejistot, ať jsou typu A či typu B.

V tomto příkladu budeme pro účel dalších výpočtů předpokládat, že hodnota kermy bez filtru byla měřena pouze jednou. Typická hodnota relativní standardní nejistoty při měření kermy kvalitním dozimetrickým řetězcem v klinických svazcích je cca 3,5 % (např. [6], kapitola 8.3.2, Tabulka 8.2, Scenario 2) a tuto hodnotu budeme zde pro náš ilustrační výpočet používat.

Veličiny č. 2 a č. 3: E_a, E_b , kerma měřená s filtrem

V zásadě zde platí stejná úvaha jako pro veličinu č. 1, t.j. pro kermu měřenou bez přídavných filtrů. Měli bychom ale navíc zohlednit skutečnost, že vložením filtru se změní kvalita svazku a odpovídajícím způsobem by se proto měl změnit kalibrační koeficient ionizační komory nebo zvýšit jeho nejistota. Pro účely dalších výpočtů budeme předpokládat, že měření je provedeno kvalitní ionizační komorou, jejíž kalibrační koeficient se v rozsahu kvalit měřených svazků nemění více, než je předpokládáno ve výše zmíněném scénáři č. 2 v kapitole 8.3.2 doporučení TRS457. Budeme proto pro velikost relativní standardní nejistoty měřených hodnot kermy E_a a E_b používat rovněž hodnotu 3,5 %.

Veličiny č. 4 a č. 5: t_a, t_b , tloušťka filtru

Budeme předpokládat, že k měření je použita běžná sada hliníkových filtrů Gammex/RMI 115A. V dřívějších letech uváděl výrobce na etiketě každé sady filtrů informaci o nejistotě jejich tloušťky. U sad filtrů dodaných v poslední době tato informace již není uvedena a není k nalezení ani na stránkách výrobce Gammex/RMI. Pro porovnání zde uvádíme vzhled tabulky vytištěné na etiketě krabičky s filtry dříve a nyní.

Tabulka č. 17: Příklad údajů výrobce o nejistotě tloušťky filtrů

dříve		nyní	
Qty	Thickness ±5%	Qty	Thickness
1	2.0 mm	1	2.0 mm
2	1.0 mm	2	1.0 mm
2	0.5 mm	2	0.5 mm
1	0.2 mm	1	0.2 mm
3	0.1 mm	3	0.1 mm

Pro účely našich dalších výpočtů budeme předpokládat, že dříve uváděná relativní nejistota 5 % je nejistotou rozšířenou s koeficientem rozšíření $k=2$ a že platí i pro nové sady těchto filtrů. Předpokládaná velikost relativní standardní nejistoty tloušťky každého jednotlivého filtru je tedy rovna $w(t)=2,5$ %. Tato nejistota je **typu B**.

Při měření ovšem často používáme několik filtrů současně, abychom dosáhli požadované tloušťky filtru. Potřebujeme-li tloušťku 2,6 mm, použijeme nejspíše filtry v kombinaci (2,0 mm + 0,5 mm + 0,1 mm) nebo (1,0 mm + 1,0 mm + 0,5 mm + 0,1 mm). Kombinujeme-li takto filtry různých tlouštěk, spočteme standardní nejistotu celkové tloušťky (v mm) podle

vztahů (19) a (20), tedy jako kvadratický součet standardních nejistot tloušťek jednotlivých filtrů v mm. Následující tabulka ukazuje výsledek takového výpočtu pro dvě výše uvedené možnosti, jak dosáhnout tloušťky filtru 2,6 mm. Z tabulky je zřejmé, že v tomto speciálním případě, kdy jsou deklarované relativní nejistoty tloušťek všech filtrů shodné, je z hlediska nejistoty měření výhodnější použít dva filtry o tloušťce 1,0 mm namísto jednoho filtru o tloušťce 2,0 mm.

Tabulka č. 18: Výpočet nejistoty tloušťky při skládání filtrů

tloušťka filtru (mm)	2	0.5	0.1	
relativní nejistota tloušťky (k=1)	0.025	0.025	0.025	
nejistota tloušťky (mm, k=1)	0.05	0.0125	0.0025	
kvadrát nejistoty (mm ² , k=1)	0.0025	0.000156	6.25E-06	
výsledná nejistota (mm, k=1)	0.052			
tloušťka filtru (mm)	1	1	0.5	0.1
relativní nejistota tloušťky (k=1)	0.025	0.025	0.025	0.025
nejistota tloušťky (mm, k=1)	0.025	0.025	0.0125	0.0025
kvadrát nejistoty (mm ² , k=1)	0.000625	0.000625	0.000156	6.25E-06
výsledná nejistota (mm, k=1)	0.038			

Uvádíme zde tento příklad filtrů konkrétního výrobce, abychom na něm ukázali, že v klinické praxi nejsou výjimkou situace, kdy velikost nejistoty hodnoty určité vstupní veličiny neznáme a musíme oslovit výrobce, dodavatele nebo jiný subjekt, abychom potřebnou informaci o velikosti nejistoty získali.

Následující tabulka shrnuje hodnoty vstupních veličin a jejich standardní nejistoty pro konkrétní měření polotloušťky svazku RQR 5 použité v tomto příkladu.

Tabulka č. 19: Hodnoty a standardní nejistoty vstupních veličin pro příklad č. 3

proměnná	označení	název veličiny	číselná hodnota	jednotka	standardní nejistota	jednotka	relativní standardní nejistota
X1	E ₀	kerma měřená bez přidavných filtrů	7.80	mGy	0.27	mGy	3.5E-02
X2	E _a	kerma nejbliže vyšší než E ₀ /2, změřená při tloušťce filtru t _a	4.45	mGy	0.16	mGy	3.5E-02
X3	E _b	kerma nejbliže vyšší než E ₀ /2, změřená při tloušťce filtru t _b	3.53	mGy	0.12	mGy	3.5E-02
X4	t _a	tloušťka filtru pro změřenou kermu E _a	2.0	mm Al	0.050	mm Al	2.5E-02
X5	t _b	tloušťka filtru pro změřenou kermu E _b	3.0	mm Al	0.075	mm Al	2.5E-02

(iv) výpočet naměřené hodnoty měřené veličiny

Dosazením hodnot x_i veličin X_i z tabulky č. 19 do vztahu (4) spočteme výslednou hodnotu první polotloušťky $d_{1/2}$, která vychází rovna **2,57 mm Al**.

(v) stanovení kombinované standardní nejistoty naměřené hodnoty

Rovnice (4) popisující model měření je složitější než v předchozích dvou příkladech. Při výpočtu výsledné nejistoty měření není proto možné použít zjednodušený postup s využitím vztahů (20) nebo (23), ale je třeba postupovat podle obecných vztahů (17-18), resp. (24).

Známe už standardní nejistoty $u(x_i)$ vstupních veličin (viz tabulka č. 14 výše). Abychom mohli provést výpočet nejistoty měření, musíme ještě spočítat koeficienty citlivosti c_i , tedy spočítat pro rovnici modelu (4) jednotlivé parciální derivace $\partial f / \partial x_i$ v bodě o souřadnicích ($x_1=7,80$ mGy; $x_2=4,45$ mGy; $x_3=3,53$ mGy; $x_4=2,0$ mm Al; $x_5 = 3,0$ mm Al). Bod s těmito souřadnicemi budeme nazývat „bod výpočtu“, stejně jako tomu bylo v příkladu č. 2 výše.

Stejně jako v předchozím příkladu použijeme pro výpočet koeficientů citlivosti c_i numerický postup, který ani u složitějších funkčních vztahů není pracný a pro účely stanovení hodnot koeficientů citlivosti je jeho přesnost plně postačující.

Praktické provedení tohoto výpočtu pro výpočet parciální derivace $\partial f / \partial x_1$ v prostředí tabulkového kalkulátoru ukazuje následující tabulka. Zvolený přírůstek veličiny X_1 (t.j. kermy E_0 měřené bez filtru) byl zvolen jako 1 % její hodnoty v bodě výpočtu. Položky ovlivněné změnou Δx_1 hodnoty proměnné X_1 jsou vyznačeny kurzívou a šedým podbarvením.

Tabulka č. 20: Numerický výpočet parciální derivace $\partial f / \partial x_1$ pro příklad č. 3

proměnná	označení	název veličiny	hodnota v bodě (x_1, x_2, \dots, x_5)	jednotka	hodnota v bodě ($x_1+\Delta x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$)	jednotka
X1	E_0	kerma měřená bez přidavných filtrů	7.80	mGy	<i>7.878</i>	mGy
X2	E_a	kerma nejbliže vyšší než $E_0/2$, změřená při tloušťce filtru t_a	4.45	mGy	4.45	mGy
X3	E_b	kerma nejbliže vyšší než $E_0/2$, změřená při tloušťce filtru t_a	3.53	mGy	3.53	mGy
X4	t_a	tloušťka filtru pro změřenou kerma E_a	2.0	mm Al	2.0	mm Al
X5	t_b	tloušťka filtru pro změřenou kerma E_b	3.0	mm Al	3.0	mm Al
	$t_b \cdot \ln(2E_a/E_0)$	první část čitatele funkce f	0.39578	mm Al	<i>0.36593</i>	mm Al
	$t_a \cdot \ln(2E_b/E_0)$	druhá část čitatele funkce f	-0.19936	mm Al	<i>-0.21926</i>	mm Al
	$\ln(E_a/E_b)$	jmenovatel funkce f	0.23161		0.23161	
	$d \cdot 1/2$	první polotloušťka	2.56962	mm Al	<i>2.52666</i>	mm Al
	c1	koeficient citlivosti pro proměnnou X1	-0.551	mm Al / mGy		

Spočtená hodnota koeficientu citlivosti c_1 je přibližně **-0,55 mm Al/mGy**.

Analogicky provedeme výpočet koeficientů citlivosti c_i pro další vstupní proměnné X_i . Pro každou vstupní proměnnou pak v souladu se vztahem (18) spočteme příspěvek $u_i(y)$ této proměnné k nejistotě $u(y)$ hodnoty y měřené veličiny Y . Kombinovanou standardní nejistotu $u(y)$ měřené hodnoty y bez uvážení vlivu korelací pak spočteme podle vztahu (17) jako odmocninu ze součtu kvadrátů těchto jednotlivých příspěvků. Postup a výsledek výpočtu ilustruje následující tabulka.

Tabulka č. 21: Kombinovaná standardní nejistota pro příklad č. 3 bez uvážení korelací vstupních veličin

proměnná	označení	číselná hodnota x_i	jednotka	standardní nejistota $u(x_i)$	jednotka	koefficient citivosti c_i	jednotka	příspěvek k výsledné nejistotě $u_i(y) = c_i \cdot u(x_i)$	jednotka	$[u_i(y)]^2$	jednotka		
X1	E_0	7.80	mGy	0.27	mGy	-0.55	mm Al/ mGy	-0.150	mm Al	2.26E-02	(mm Al) ²		
X2	E_a	4.45	mGy	0.16	mGy	0.40	mm Al/ mGy	0.062	mm Al	3.84E-03	(mm Al) ²		
X3	E_b	3.53	mGy	0.12	mGy	0.72	mm Al/ mGy	0.089	mm Al	8.00E-03	(mm Al) ²		
X4	t_a	2.0	mm Al	0.050	mm Al	0.43	1	0.022	mm Al	4.62E-04	(mm Al) ²		
X5	t_b	3.0	mm Al	0.075	mm Al	0.57	1	0.043	mm Al	1.83E-03	(mm Al) ²		
Výpočet kombinované standardní nejistoty měření													
										$\Sigma [u_i(y)]^2$	3.68E-02	(mm Al) ²	
										Kombinovaná standardní nejistota měření		0.19	mm Al

Stejný výpočet provedeme ještě jednou, tentokrát se započtením korelací, tedy se zahrnutím kombinovaných součinů $u_i(y) \cdot u_j(y) \cdot r_{ij}$. Výsledky výpočtu jsou shrnuty v následující tabulce.

Tabulka č. 22: Kombinovaná standardní nejistota pro příklad č. 3 s uvážením korelací vstupních veličin

proměnná	označení	číselná hodnota x_i	jednotka	standardní nejistota $u(x_i)$	jednotka	koefficient citivosti c_i	jednotka	příspěvek k výsledné nejistotě $u_i(y) = c_i \cdot u(x_i)$	jednotka	$[u_i(y)]^2$	jednotka		
X1	E_0	7.80	mGy	0.27	mGy	-0.55	mm Al/ mGy	-0.150	mm Al	2.26E-02	(mm Al) ²		
X2	E_a	4.45	mGy	0.16	mGy	0.40	mm Al/ mGy	0.062	mm Al	3.84E-03	(mm Al) ²		
X3	E_b	3.53	mGy	0.12	mGy	0.72	mm Al/ mGy	0.089	mm Al	8.00E-03	(mm Al) ²		
X4	t_a	2.0	mm Al	0.050	mm Al	0.43	1	0.022	mm Al	4.62E-04	(mm Al) ²		
X5	t_b	3.0	mm Al	0.075	mm Al	0.57	1	0.043	mm Al	1.83E-03	(mm Al) ²		
Výpočet kombinované standardní nejistoty měření													
										$\Sigma [u_i(y)]^2$	3.68E-02	(mm Al) ²	
										$2 \cdot u_2(y) \cdot u_4(y) \cdot r_{2,4}$		-2.67E-03	(mm Al) ²
										$2 \cdot u_3(y) \cdot u_5(y) \cdot r_{3,5}$		-7.65E-03	(mm Al) ²
										Kombinovaná standardní nejistota měření		0.16	mm Al

Vidíme, že v tomto případě vedlo započtení vzájemných korelací vstupních veličin k cennému snížení standardní nejistoty měření.

(vi) stanovení rozšířené nejistoty měření

Rozšířená nejistota bude rovna dvojnásobku standardní nejistoty, její hodnota tedy bude **0,32 mm Al**.

(vii) **uvedení výsledku měření**

Pro první polotloušťku $d_{1/2}$ rentgenového svazku byla měřením stanovena hodnota $d_{1/2} = (2,57 \pm 0,32) \text{ mm Al}$. Uvedená nejistota je nejistotou rozšířenou ($k = 2$) a odpovídá pravděpodobnosti pokrytí přibližně 95 %.

5. Význam nejistot při posouzení shody výsledku měření s požadavkem (například s referenční hodnotou s ohledem na nejistotu měření a toleranci).

Pro posouzení shody výsledku kvantitativního měření s požadavkem byl použit dokument [7] „ILAC-G8:03/2009 Pokyny k uvádění shody se specifikací“, konkrétně jeho český překlad vypracovaný ČIA.²

Kvantitativně vyjádřená tolerance určuje interval s horní a dolní mezí. Například v případě tolerance $\pm 3 \%$ z referenční hodnoty bude platit vztah: *horní toleranční mez = referenční hodnota + 3 % z referenční hodnoty* a analogicky *dolní toleranční mez = referenční hodnota - 3 % z referenční hodnoty*. Pro interval vymezený horní a dolní toleranční mezí budeme dále používat název *toleranční rozmezí*.

Budeme-li pod pojmem „specifikace“ uvedeným ve zmíněném dokumentu ILAC rozumět pojem „toleranční rozmezí“ ve smyslu předchozího odstavce, je pak možné pro vyjádření shody či neshody použít formulací uvedených v tomto dokumentu ILAC.

Smyslem této kapitoly je poukázat na to, že při aplikaci pravidel uvedených v dokumentu ILAC-G8:03/2009 můžeme zhodnotit výsledek měření jako „vyhovuje“ pouze pro Případ 1 (viz schématický Obrázek II.1. níže, který znázorňuje změřené hodnoty, jejich rozšířené nejistoty a horní toleranční mez). Pro Případ 2 a Případ 3 není možné vyjádřit shodu ani neshodu a je nutné provést nové přesnější měření tak, že například použijeme přesnější měřicí přístroj, použijeme jiný měřicí přístroj, provedeme více měření apod. Případ 4 zhodnotíme jako „nevyhovuje“.

V Obrázku II.1. horizontální line zobrazuje „Horní mez“, body s vertikálními úsečkami pak vyjadřují střední hodnoty měření (body) s intervalem odpovídajícím rozšířené nejistotě měření (vertikální úsečky), určujícím interval hodnot měřené veličiny obsahující skutečnou (pravou) hodnotu s pravděpodobností přibližně 95 %.

ILAC-G8:03/2009 Pokyny k uvádění shody se specifikací

Překlad ČIA - září 2009 [7]

Výňatky z dokumentu vypracovaného Accreditation Committee ILAC na podporu zkušebních a kalibračních laboratoří na celém světě při vyjadřování a uvádění shody se specifikací u

² ILAC International Laboratory Accreditation Cooperation
ČIA Český institut pro akreditaci, o.p.s.

kvantitativních měření, s cílem vyhovět požadavkům normy ISO/IEC 17025. Výklad je založen na předpokladu, že příslušný výsledek měření má v podstatě normální rozdělení.

5.1 Uvádění shody se specifikací pro jednotlivou veličinu.

5.1.1 Popisuje-li specifikace interval s horní a dolní mezí, pak by vyjádření o shodě či neshodě mělo být vypracováno pouze tehdy, když poměr rozšířeného intervalu nejistoty ke specifikovanému intervalu je přiměřeně malý a vhodný pro daný účel (to znamená, že daná laboratoř by měla být schopna splnit potřeby zákazníka).

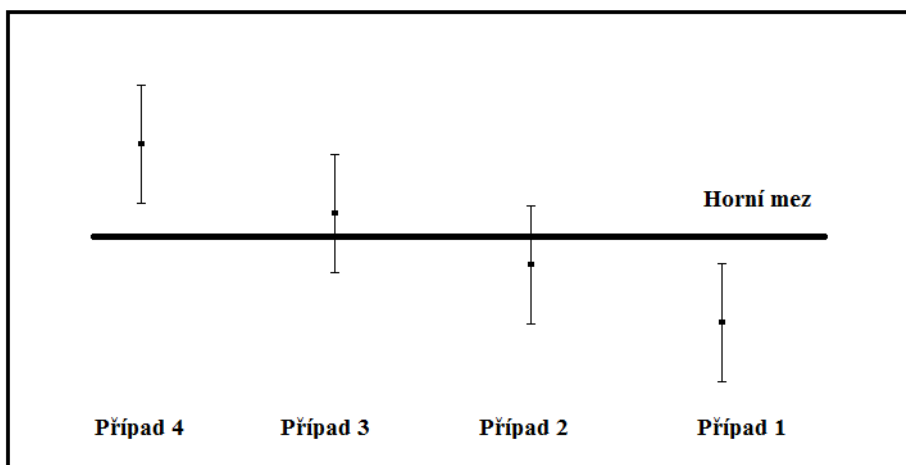
5.1.2 Je-li dosažena shoda se specifikací, mělo by být zákazníkovi jasné, jaká pravděpodobnost pokrytí pro rozšířenou nejistotu byla použita. Obecně bude pravděpodobnost pokrytí 95 % a vyjádření bude obsahovat poznámku ve smyslu, že „*Vyjádření shody je založeno na pravděpodobnosti pokrytí 95 % pro rozšířenou nejistotu*“. To znamená pravděpodobnost, že dané měření je pod horní mezí specifikace, je vyšší než 95 %, tj. přibližně 97,5 % pro symetrická rozdělení. Obdobný závěr lze učinit pro dolní mez specifikace. Jiné hodnoty pravděpodobnosti pokrytí pro rozšířenou nejistotu by měly být dohodnuty mezi laboratoří a zákazníkem. Pro rozšířenou nejistotu mohou být zvoleny vyšší pravděpodobnosti pokrytí než 95 %, nižší hodnoty by ale neměly být používány.

5.1.3 Pro určitou horní mez specifikace je doporučován následující přístup. (Obdobný přístup se použije též pro dolní mez specifikace.):

(a) **Shoda:** Jestliže mez daná specifikací není překročena výsledkem měření zvětšeným o rozšířenou nejistotu s pravděpodobností pokrytí 95 %, pak je možno vyjádřit shodu se specifikací (viz. Příklad 1 z obr. II.1). To je možno vyjádřit jako „*Shoda*“ nebo „*Shoda – výsledek měření je v rámci meze dané specifikací (nebo pod mezí danou specifikací) bere-li se v úvahu nejistota měření*“. Při kalibraci je tento závěr často uváděn jako „*Vyhovuje*“;

(b) **Neshoda:** Jestliže je mez daná specifikací překročena výsledkem měření zmenšeným o rozšířenou nejistotu s pravděpodobností pokrytí 95 %, pak je možno vyjádřit neshodu se specifikací (viz. Příklad 4 z obr. II.1). To je možno vyjádřit jako „*Neshoda*“ nebo „*Neshoda – výsledek měření je mimo mez danou specifikací (nebo nad mezí danou specifikací), bere-li se v úvahu nejistota měření*“. Při kalibraci je tento závěr často uváděn jako „*Nevyhovuje*“;

(c) Jestliže bude výsledek měření zvětšený/zmenšený o rozšířenou nejistotu s pravděpodobností pokrytí 95 % překrývat mezní hodnotu (viz. Případy 2 a 3 z obr. II.1), pak není možné vyjádřit shodu nebo neshodu. Výsledek měření a rozšířená nejistota s pravděpodobností pokrytí 95 % by pak měl být uveden spolu s vyjádřením naznačujícím, že nebyla prokázána ani shoda, ani neshoda. Vhodné vyjádření vztahující se na tyto situace by bylo „*Není možné vyjádřit shodu*“. V Příkladě 2 z obr. II.1 je možno naznačit, že dané měření je pod mezní hodnotou, použitím nějakého obdobného vyjádření jako „*Není možné vyjádřit shodu za použití pravděpodobnosti pokrytí 95 % pro rozšířenou nejistotu, přestože výsledek měření se nachází pod mezní hodnotou*“. Pokud budou uváděna kratší vyjádření, tak by neměla vzbuzovat dojem, že je daný výsledek ve shodě se specifikací.



Obrázek II.1. Shoda se specifikací pro horní mez. Vyjádření shody může být rozšířeno tak, aby explicitně vyjadřovalo, zda se shoda týká horní nebo dolní meze dané specifikací za použití pravděpodobnosti pokrytí 95 %.

5.1.4 Pokud je shoda se specifikací (pro horní mez) definována jako skutečnost, že naměřená hodnota je menší než mez daná specifikací, a výsledek měření je roven hodnotě meze dané specifikací, pak musí být vyjádřena neshoda. Obdobné ustanovení platí pro dolní mez.

5.1.5 Pokud budou vnitrostátní či jiné předpisy vyžadovat provedení rozhodnutí ohledně odmítnutí či schválení, může být Případ 2 z obr. II.1 vyjádřen jako shoda a Případ 3 z obr. II.1 jako neshoda s mezí danou specifikací.

5.2 Uvádění shody s požadavky nebo specifikacemi v případě několika veličin.

5.2.1 Jestliže vyhodnocení shody se specifikací obsahuje více veličin (a/nebo měřených parametrů), měla by být každá naměřená hodnota vyhodnocována nezávisle. Výsledek každého vyhodnocení by měl být uveden tak, jak je popsáno v části 5.1.3.

5.2.2 Celkové hodnocení shody s požadavky nebo specifikací může být zformulováno jedním ze tří následujících způsobů nebo jejich kombinací a může být zákazníkovi sděleno v určitém souhrnném vyjádření podle následujících příkladů:

(a) „Všechny naměřené hodnoty jsou ve shodě s mezí danou (mezemi danými) specifikací“ nebo „Položka/vzorek je ve shodě s požadavky“. To se vztahuje na situace, kdy všechna měření jsou ve shodě se specifikací (Případ 1 z obr. II.1).

(b) „Pro některé z naměřených hodnot není možné učinit vyjádření o shodě se specifikací.“ To se vztahuje na situace, kde některá z měření nevykazují ani shodu ani neshodu se specifikací (Případ 2 a 3 z obr. II.1).

(c) „Některé z naměřených hodnot nejsou ve shodě se specifikacemi“ nebo „Položka/vzorek není ve shodě s požadavky“. To se vztahuje na situace, kde jedno nebo více měření nejsou ve shodě se specifikacemi (Případ 4 z obr. II.1).

Jestliže je vypracovááno celkové hodnocení, pak by mělo zahrnovat vyjádření ohledně pravděpodobnosti pokrytí pro rozšířenou nejistotu, jako např. „*Vyjádření shody se specifikací (nebo požadavkem) je založeno na pravděpodobnosti pokrytí 95 % pro rozšířenou nejistotu výsledků měření, na nichž je založeno rozhodnutí o shodě*“. Vyjádření by mělo jasně uvádět, zda byly mezi laboratoří a zákazníkem dohodnuty jiné hodnoty pravděpodobnosti pokrytí pro rozšířenou nejistotu, jak je popsáno v části 5.1.2.

6. Základní pojmy týkající se nejistot měření: definice podle GUM, VIM – výňatky z těchto dokumentů [10, 11].

Dokumenty „Pokyny pro vyjadřování nejistoty měření“ (GUM) a „Terminologie z oblasti metrologie“ označovaný také „VIM“ [8, 9] jsou dokumenty vytvořené Společným výborem pro pokyny v metrologii (JCGM) a jsou původní verzí pokynů. Jedná se o dokumenty anglický a anglicko-francouzský, které jsou volně dostupné na adrese www.bipm.org, nelze je kopírovat bez písemného souhlasu ředitele BIPM. BIPM nepřebírá odpovědnost za platnost, přesnost, úplnost nebo kvalitu informací a materiálů nabízených v jakémkoli překladu. Jediná oficiální verze je originální verze dokumentu publikovaná BIPM.

Sborníky technické harmonizace [10, 11] vydané ÚNMZ jsou českou verzí dokumentů [8, 9], jsou dvojjazyčné česko-anglické. Oba dokumenty [8, 9] byly vydány také dvojjazyčně česko-anglicky jako technické normalizační informace [12, 13].

JCGM je tvořen členskými organizacemi: BIPM, IEC, IFCC, ILAC, IUPAC, IUPAP, ISO, OIML.

BIPM	Mezinárodní výbor pro míry a váhy
IEC	Mezinárodní elektrotechnická komise
IFCC	Mezinárodní federace pro klinickou chemii
ISO	Mezinárodní organizace pro standardizaci
IUPAC	Mezinárodní unie pro čistou a aplikovanou chemii
IUPAP	Mezinárodní unie pro čistou a aplikovanou fyziku
OIML	Mezinárodní organizace legální metrologie

Číslování kapitol i rovnic v následujícím textu je pro zachování souvislosti převzato z dokumentů (GUM) a (VIM) [10, 11], u označení rovnic je předřazená II.

6.1. Definice vybraných základních pojmů

(měřitelná) veličina, (measurable) quantity (GUM, B.2.1)

vlastnost jevu, tělesa nebo látky, kterou lze kvalitativně rozlišit a kvantitativně určit

Poznámka:

¹ Termín „veličina“ se může vztahovat na veličinu v obecném smyslu [viz příklad (a)] nebo na blíže určenou veličinu [viz příklad (b)].

Příklady:

a) veličiny v obecném smyslu: délka, čas, hmota, teplota, elektrický odpor, nasycenost látky;

b) blíže určené veličiny:

– délka určité tyče

– elektrický odpor daného zkušební vzorku drátu

– koncentrace látkového množství ethanolu v daném vzorku vína.

² Veličiny, které mohou být navzájem porovnány a seřazeny podle velikosti, jsou nazývány veličiny stejného druhu.

³ Veličiny stejného druhu mohou být společně seskupovány do kategorií veličin, například:

– práce, teplota, energie;

– tloušťka, obvod, vlnová délka.

⁴ Značky veličin jsou uvedeny v ISO 312).

[také VIM:1993, definice 1.1]

indikace, indication (VIM, 4.1(3.2))

údaj

hodnota veličiny poskytnutá měřidlem nebo měřicím systémem

Poznámky:

¹ Indikace smí být prezentována vizuální nebo akustickou formou, nebo smí být přenesena do dalšího zařízení. Indikace je často dána pozicí ukazovatele na stupnici u analogových výstupů, zobrazeným nebo vytištěným číslem u digitálních výstupů, kódovaným vzorem u kódovaných výstupů nebo přidělenou hodnotou veličiny u ztělesněné míry.

² Indikace a odpovídající hodnota veličiny, která je měřena, nejsou nutně hodnotami veličin stejného druhu.

pravá hodnota (veličiny), true value (of a quantity) (GUM, B. 2.3)

hodnota, která je ve shodě s definicí dané blíže určené veličiny

Poznámky:

¹ Toto je hodnota, která by byla získána naprosto přesným (perfektním) měřením.

² Pravé hodnoty jsou neurčitelného charakteru.

³ Ve spojitosti s pravou hodnotou se v anglické, francouzské a německé verzi používá spíše neurčitý člen („a“, „une“, „ein“) než člen určitý („the“, „la“, „der“), protože se může vyskytovat mnoho hodnot, které jsou ve shodě s definicí dané blíže určené veličiny.

[VIM:1993, definice 1.19]

Komentář pokynu: Viz příloha GUM, D a zvláště GUM, D. 3.5, která uvádí důvody, proč termín „pravá hodnota“ není použitý v tomto pokynu a proč termíny „pravá hodnota měřené veličiny“ nebo (veličiny) a „hodnota měřené veličiny“ nebo (veličiny) jsou uváděny jako ekvivalentní.

(GUM, D.3.5) Termínu „pravá hodnota měřené veličiny“ nebo veličiny (často zkracované jako „pravá hodnota“) se tento pokyn vyvaroval, protože slovo „pravá“ je považováno za nadbytečné. „Měřená veličina“ (viz GUM, B.2.9) je míněna jako „určená veličina subjektu měření“, a tedy „hodnota měřené veličiny“ znamená „hodnota určené veličiny subjektu měření“. Zatímco „přesná veličina“ je obecně chápána jako konečná nebo určená veličina (viz GUM, B.2.1, poznámka1), přídavné jméno „pravá“ v terminu „pravá hodnota měřené veličiny“ (nebo „pravá hodnota veličiny“) je zbytečné – „pravá“ hodnota měřené veličiny

(nebo veličiny) je jednoduše hodnota měřené veličiny (nebo veličiny). Navíc, jak je naznačeno v předchozím textu, jedinečná „pravá“ hodnota je pouze idealizovaný pojem.

konvenčně pravá hodnota (měřené veličiny), conventional true value(of a quantity) (GUM B.2.4)

hodnota, která je přiřazována bližší určené veličině a přijata někdy konvencí jako hodnota, jejíž nejistota je vyhovující pro daný účel

Poznámky:

¹ „Konvenčně pravá hodnota“ je někdy nazývána jako **stanovená hodnota, nejlepší odhad hodnoty, konvenční hodnota nebo referenční hodnota**. „Referenční hodnota“ v tomto významu nemá být zaměňována za „referenční hodnotu“ ve významu použitém v poznámce k [VIM] 5.7.

² Ke stanovení konvenčně pravé hodnoty se často používá velkého počtu výsledků měření veličiny.

[také VIM:1993, definice 1.20]

Komentář pokynu: Viz komentář pokynu k B.2.3.

referenční hodnota veličiny, reference quantity value (VIM, 5.18)

referenční hodnota, reference value

hodnota veličiny používaná jako základ pro porovnávání s hodnotami veličin stejného druhu

Poznámka:

¹Referenční hodnotou veličiny může být pravá hodnota veličiny měřené veličiny, která je v takovém případě neznámá, nebo konvenční hodnota veličiny, která je v takovém případě známá.

²Referenční hodnota veličiny s přidruženou nejistotou měření je obvykle poskytována s referencí k

- materiálu, např. certifikovanému referenčnímu materiálu;
- zařízení, např. stabilizovanému laseru;
- referenčnímu postupu měření;
- porovnávání etalony (standardy).

měření, measurement (GUM, B.2.5)

soubor činnosti, jejichž cílem je stanovit hodnotu veličiny

Poznámka:

Tyto činnosti mohou být prováděny automaticky.

[také VIM:1993, definice 2.1]

měřená veličina, measurand (GUM, B.2.9)

blíže určená veličina, která je předmětem měření

Příklad:

Tlak páry daného vzorku vody při 20 °C.

Poznámka:

Specifikace měřené veličiny může vyžadovat údaje o dalších veličinách jako je čas, teplota a tlak.

[také VIM:1993, definice 2.6]

výsledek měření, result of a measurement (GUM, B.2.11)

hodnota získaná měřením a přiřazená k měřené veličině

Poznámka:

¹ *Pokud se jedná o výsledek, má se vyjasnit, jestli se tím odkazuje na:*

– indikaci

– nekorigovaný výsledek

– korigovaný výsledek a zda se jedná o průměr získaný z několika hodnot

² *Úplný údaj výsledku měření obsahuje informaci o nejistotě měření.*

[také VIM:1993, definice 3.1]

výběrová směrodatná odchylka, experimental standard deviation (GUM, B.2.17)

pro sérii n měření téže měřené veličiny je to veličina $s(q_k)$ charakterizující rozptýlení výsledků a je dána rovnicí

$$s(q_k) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})^2}{n-1}},$$

kde q_k je výsledek k -tého měření a \bar{q} je aritmetický průměr n uvažovaných výsledků.

Poznámky:

¹ *Uvažuje-li se série n hodnot jako vzorek rozdělení, pak \bar{q} je náhodný odhad střední hodnoty μ_q , a $s^2(q_k)$ je náhodný odhad rozptylu σ^2 tohoto rozdělení.*

² *Výraz $s(q_k)/\sqrt{n}$ je odhad směrodatné odchylky rozdělení \bar{q} a nazývá se **výběrová směrodatná odchylka střední hodnoty**.*

³ *„Výběrová směrodatná odchylka střední hodnoty“ je někdy nesprávně nazývaná **směrodatná chyba střední hodnoty**.*

chyba (měření), error (of measurement) (GUM, B.2.19)

výsledek měření minus pravá hodnota měřené veličiny

Poznámky:

¹ *Protože pravou hodnotu nelze určit, používá se v praxi konvenčně pravá hodnota*

² *Pokud je nutné rozlišit „chybu“ od „relativní chyby“, je „chyba“ někdy nazývaná **absolutní chybou měření**. To se nemá zaměňovat s **absolutní hodnotou chyby**, což je modul chyby.*

Komentář: Jestliže výsledek měření je závislý na hodnotách jiných veličin než měřené veličiny, chyby měřených hodnot těchto veličin přispívají k chybě výsledku měření.

[také VIM:1993, definice 3.10]

Komentář pokynu: Jestliže výsledek měření je závislý na hodnotách jiných veličin než měřené veličiny, chyby měřených hodnot těchto veličin přispívají k chybě výsledku měření. Viz také komentář pokynu k GUM, B.2.22 a B.2.3.

chyba měření, measurement error, error of measurement (VIM, 2.16) (3.10)

chyba

naměřená hodnota veličiny minus referenční hodnota veličiny

Poznámka 1:

Pojem ,chyba měření‘ může být použit

a) když ke vztažení existuje jediná referenční hodnota veličiny, která se vyskytuje při kalibraci provedené pomocí etalonu s naměřenou hodnotou veličiny mající zanedbatelnou nejistotu měření, nebo jestliže je dána konvenční hodnota veličiny, v případě, ve kterém je chyba měření známa, a

b) jestliže se předpokládá měřená veličina reprezentovaná jedinečnou pravou hodnotou veličiny nebo souborem pravých hodnot veličiny zanedbatelného rozpětí v případě, ve kterém je chyba měření neznámá.

Poznámka 2:

Chyba měření nemá být zaměňována s výrobní chybou nebo omylem.

relativní chyba, relative error (GUM, B.2.20)

chyba měření dělená pravou hodnotou měřené veličiny

Poznámka:

Když pravá hodnota nemůže být určena, je v praxi použita konvenční pravá hodnota. (viz VIM: 1993, definice 1.19 [B.2.3] a 1.20 [B.2.4]).

[také VIM:1993, definice 3.12]

Komentář pokynu: Viz. komentář pokynu k B.2.3.

náhodná chyba, random error (GUM, B.2.21)

výsledek měření mínus střední hodnota, která by vznikla z nekonečného počtu měření téže měřené veličiny uskutečněných za podmínek opakovatelnosti

Poznámky:

¹ *Náhodná chyba je chyba mínus systematická chyba.*

² *Protože může být proveden pouze konečný počet měření, je možné určit pouze odhad náhodné chyby.*

[VIM:1993, definice 3.13]

Komentář pokynu: Viz. poznámka pokynu k B.2.22.

systematická chyba, systematic error (GUM, B.2.22)

střední hodnota, která by vznikla z nekonečného počtu měření téže měřené veličiny uskutečněných za podmínek opakovatelnosti, od které se odečte pravá hodnota měřené veličiny

Poznámky:

¹ *Systematická chyba je rovna chybě mínus náhodná chyba.*

² *Jak pravá hodnota, tak systematická chyba a její příčiny nemohou být zcela známé.*

³ *Pro měřicí přístroj, viz „chyba správnosti (měřicího přístroje)“ (VIM: 1993, definice 5.25).*

[VIM:1993, definice 3.14]

Komentář pokynu: Často je dovoleno uvažovat, že chyba výsledku měření (viz GUM, B.2.19) vyplývá z několika náhodných a systematických vlivů, kde chyby jednotlivých složek přispívají k chybě výsledku měření. Viz také poznámky pokynu k GUM, B.2.19 a B.2.3.

systematická chyba měření, systematic measurement error (VIM, 2.17)(3.14)

systematická chyba

složka **chyby měření**, která v opakovaných **měřeních** zůstává konstantní nebo se mění předvídatelným způsobem

Poznámka:

¹Referenční hodnotou veličiny pro systematickou chybu měření je pravá hodnota veličiny nebo naměřená hodnota veličiny etalonu (standardu) se zanedbatelnou nejistotou měření, nebo konvenční hodnota veličiny.

²Systematická chyba měření a její příčiny mohou být známé nebo neznámé. Ke kompenzaci známé systematické chyby měření může být aplikována korekce.

³Systematická chyba měření se rovná chybě měření minus náhodná chyba měření.

nejistota (měření), uncertainty (of measurement) (GUM, 2.2.3)

parametr spojený s výsledkem měření, který charakterizuje rozptýlení hodnot, které mohou být důvodně přiřazeny měřené veličině

Poznámky:

¹ Parametr smí být například směrodatná odchylka (nebo její násobek) nebo poloviční šířka intervalu, se stanovenou konfidenční úrovní.

² Nejistota měření je obecně souhrn mnoha složek. Některé z těchto složek je dovoleno vyhodnocovat ze statistického rozdělení výsledků série měření, které je charakterizováno výběrovými směrodatnými odchylkami. Ostatní složky, které mohou být také charakterizovány směrodatnými odchylkami, jsou vyhodnoceny z předpokládaných rozdělení pravděpodobností založených na zkušenostech nebo na jiných informacích.

³ Předpokládá se, že výsledek měření je nejlepší odhad hodnoty měřené veličiny, a že všechny složky nejistoty, včetně těch, které vznikají systematickými jevy, jako jsou složky spojené s korekcemi referenčních etalonů, přispívají k rozptýlení.

standardní nejistota, standard uncertainty (GUM, 2.3.1)

nejistota výsledku měření vyjádřená jako směrodatná odchylka

hodnocení (nejistoty) způsobem A, type A evaluation (of uncertainty) (GUM, 2.3.2)

metoda hodnocení nejistoty pomocí statistické analýzy série pozorování

hodnocení (nejistoty) způsobem B, type B evaluation (of uncertainty) (GUM, 2.3.3)

metoda hodnocení nejistoty pomocí jiných způsobů než je statistická analýza řady pozorování

kombinovaná standardní nejistota, combined standard uncertainty (GUM, 2.3.4)

standardní nejistota výsledku měření, pokud je výsledek získaný z hodnot několika dalších veličin, rovnající se kladné hodnotě druhé odmocniny součtu výrazů; kde výrazy jsou rozptyly nebo kovariance těchto dalších veličin vážených podle toho, jak se výsledek měření mění se změnami těchto veličin

rozšířená nejistota, expanded uncertainty (GUM, 2.3.5)

veličina stanovující interval okolo výsledku měření, který dovoluje očekávat pokrytí velkého podílu rozdělení hodnot, které mohou být důvodně přiřazeny k měřené veličině

Poznámky:

¹ Podíl je dovoleno považovat za pokrytí pravděpodobnosti nebo konfidenční úroveň intervalu.

² Spojení určité konfidenční úrovně s intervalem určeným rozšířenou nejistotou vyžaduje explicitní nebo implicitní předpoklady týkající se rozdělení pravděpodobnosti charakterizované výsledkem měření a jeho kombinovanou standardní nejistotou. Konfidenční úroveň, která smí být přiřazena k tomuto intervalu, může být známa pouze do rozsahu, ke kterému je dovoleno přiřadit tyto předpoklady.

³ Rozšířená nejistota je nazývána celkovou nejistotou v doporučení INC-1 (1980), paragraf 5.

činitel rozšíření, coverage factor (GUM, 2.3.6)

číselná hodnota činitele, užívaná jako násobek kombinované standardní nejistoty k získání rozšířené nejistoty

Poznámka:

Činitel rozšíření k je obvykle číslo z rozsahu od 2 do 3.

střední hodnota, expectation (GUM, C.3.1)

Střední hodnota funkce $g(z)$, s hustotou pravděpodobnosti $p(z)$ náhodné veličiny z , je stanovena pomocí

$$E[g(z)] = \int g(z)p(z) dz$$

kde, podle definice $p(z)$ platí: $\int p(z) dz = 1$

Střední hodnota náhodné veličiny z , značena μ_z , která je také známá jako očekávaná hodnota nebo průměr veličiny z , je dána pomocí

$$\mu \equiv E(z) = \int zp(z) dz$$

Ta je statisticky odhadnuta pomocí aritmetického průměru (average) nebo průměru (mean) \bar{z} , získaného z počtu n nezávislých pozorování z_i náhodné veličiny z , s hustotou pravděpodobnosti $p(z)$

$$\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$$

rozptyl, variance (GUM, C.3.2)

Rozptyl náhodné veličiny je střední hodnota čtverce odchylek náhodné veličiny od její střední hodnoty. Tedy rozptyl náhodné veličiny z s hustotou pravděpodobnosti $p(z)$ je dán

$$\sigma^2(z) = \int (z - \mu_z)^2 p(z) dz$$

kde μ_z je střední hodnota pro z . Hodnota rozptylu $\sigma^2(z)$ může být odhadnuta pomocí vzorce:

$$s^2(z_i) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2$$

kde

$$\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$$

a z_i je n nezávislých pozorování z .

Poznámky:

¹ Činitel $n - 1$ ve výrazu pro $s^2(z_i)$ vzniká z vazby mezi z_i a z a odráží skutečnost, že zde v množině $\{z_i - z\}$ je jen $n - 1$ nezávislých prvků.

² Pro známou střední hodnotu μ_z náhodné veličiny z může být rozptyl odhadnut pomocí:

$$s^2(z_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \mu_z)^2$$

³ (Poznámka autorů tohoto textu): V praxi bývá někdy užívána bezrozměrná veličina **variační koeficient** spočtená jako podíl směrodatné odchylky a absolutní hodnoty ze střední hodnoty

$$V = \frac{\sqrt{\sigma^2(X)}}{|E(X)|}.$$

Tato veličina ale není v dokumentech GUM, VIM ani v příslušných normách uvedena a její používání není podporováno.

6.2. Model měření

(GUM, 3.1.1) Předmětem **měření** (GUM, B.2.5) je určit **hodnotu** (GUM, B.2.2) **měřené veličiny** (GUM, B.2.9), tj. hodnotu **blíže určené veličiny** (GUM, B.2.1, poznámka 1), která se bude měřit. Měření proto začíná vhodnou specifikací měřené veličiny, **metodou měření** (GUM, B.2.7) a **postupem měření** (GUM, B.2.8).

Poznámka:

Pojem „pravá hodnota“ (viz příloha GUM, D) není v tomto pokynu použit a to z důvodů uvedených v GUM, D.3.5; pojem „hodnota měřené veličiny“ (nebo veličiny) a „pravá hodnota měřené veličiny“ (nebo veličiny) jsou chápány jako ekvivalenty.

(GUM, 3.1.2) Obecně, **výsledek měření** (GUM, B.2.11) je jenom aproximace nebo **odhad** (GUM, C.2.26) hodnoty měřené veličiny a je kompletní pouze tehdy, pokud je doprovázen prohlášením o **nejistotě** (GUM, B.2.18) tohoto odhadu.

(GUM, 3.1.3) V praxi požadovaná specifikace nebo definice měřené veličiny jsou diktovány **požadovanou přesností měření** (GUM, B.2.14). Měřená veličina má být definovaná s dostatečnou úplností ve vztahu k požadované přesnosti a to tak, aby její hodnota byla jednoznačná pro všechny praktické účely spojené s jejím měřením. V tomto pokynu je v tomto smyslu používán výraz „hodnota měřené veličiny“.

Příklad:

Jestliže jmenovitá délka ocelové tyče jeden metr dlouhé musí být určena s mikrometrovou přesností, tak její specifikace má také obsahovat teplotu a tlak, při kterých je délka určena. Takže měřená veličina má být stanovena jako, například, délka tyče při teplotě 25,00 °C a 101 325 Pa (a k tomu jakýkoliv další parametr považovaný za nutný, jako je např. způsob podepření tyče). Avšak, jestliže délka tyče je určena s milimetrovou přesností, její specifikace nebude potřebovat stanovení teploty nebo tlaku nebo hodnotu pro jakéhokoliv další určení parametru.

Poznámka:

Neúplná definice měřené veličiny může způsobit dostatečně velký nárůst složky nejistoty a musí být tak zahrnut do hodnocení nejistoty výsledku měření (viz. GUM, D.1.1, D.3.4 a D.6.2).

(GUM, 3.1.4) V mnoha případech je výsledek měření určený na základě série pozorování za **podmínek opakovatelnosti**. Předpokládá se, že kolísání při opakovaných pozorováních vznikají tak, že **ovlivňující veličiny**, které mají vliv na výsledek měření nejsou udržitelné v plně konstantním stavu.

(GUM, 3.1.6) Matematický model měření, který přeměňuje množinu hodnot z opakovaných pozorování ve výsledek měření, má rozhodující význam, protože k hodnotám pozorování ještě obecně zahrnuje různé ovlivňující veličiny, které nejsou přesně známy. Tento nedostatek znalosti přispívá k nejistotě výsledku měření, zrovna tak jako kolísání při opakovaných pozorováních spojené s vlastním matematickým modelem.

(GUM, 3.1.7) Tento *pokyn* zachází s měřenou veličinou jako se skalárem (jedinou veličinou). Rozšíření na skupinu souvisejících měřených veličin, určených současně při stejném měření, vyžaduje nahrazení skaláru měřené veličiny a jejího **rozptylu** vektorem měřené veličiny a **kovarianční maticí**. Takové nahrazení je v tomto *pokynu* uvažováno pouze v příkladech.

6.2.1 Jednoduchý lineární model bez korelací

Modelování měření (GUM, 4.1.1)

Ve většině případů měřená veličina Y není přímo měřitelná, ale závisí na N dalších měřitelných veličinách X_1, X_2, \dots, X_N a to prostřednictvím funkčního vztahu f :

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N) \quad (\text{II.1})$$

Poznámka:

¹ Pro účely hospodaření s poznámkami, je v tomto pokynu použita stejná značka pro fyzikální veličinu (měřená veličina) a pro náhodnou veličinu (viz GUM, 4.2.1), která vyjadřuje možný výstup pozorování této veličiny. Pokud je stanoveno, že X_i má určité rozdělení pravděpodobnosti, značka bude použita pro druhý význam; předpokládá se, že fyzikální veličina se sama může charakterizovat při nezbytně jednoznačné hodnotě (viz GUM, 1.2 a 3.1.3).

² Při sérii pozorování k -tá pozorovaná hodnota proměnné X_i je značena $X_{i,k}$; tudíž jestliže R značí odpor rezistoru, k -tá pozorovaná hodnota odporu bude značena R_k .

³ Odhad X_i (přesně řečeno, jeho očekávaná hodnota) je značen x_i .

Příklad:

Jestliže napětí V je připojeno k rezistoru závislém na teplotě, který má odpor R_0 při stanovené teplotě t_0 a lineárním teplotním koeficientu odporu α , výkon P (měřena veličina) rozptýlený rezistorem při teplotě t závisí na V, R_0, α a t podle následujícího vztahu:

$$P = f(V, R_0, \alpha, t) = V^2 / \{R_0 [1 + \alpha(t - t_0)]\}$$

Poznámka:

Ostatní metody měření P mohou být modelovány pomocí odlišných matematických výrazů.

(GUM, 4.1.2) *Vstupní veličiny* X_1, X_2, \dots, X_N , na kterých *výstupní veličina* Y závisí, smí samy být považovány za měřené veličiny a mohou být závislé na jiných veličinách, včetně korekcí a korekčních činitelů pro systematické vlivy, což vede ke komplikovanému funkčnímu vztahu f , který nikdy nemůže být popsán explicitně. Navíc f by mohla být určena experimentálně (viz GUM, 5.1.4) nebo existovat jenom jako algoritmus, který musí být číselně vyhodnocen. Funkce f jak je znázorněna v tomto pokynu, má být interpretována v tomto širším významu, speciálně jako funkce, která obsahuje všechny veličiny, včetně korekcí a korekčních faktorů, které mohou přispívat významnými komponenty k nejistotě výsledku měření.

Jestliže data indikují, že f nemodeluje měření do té míry, jak je uloženo požadovanou přesností výsledku měření, dodatečné vstupní veličiny musí být zahrnuty do f k vyloučení nedostatečnosti (viz GUM, 3.4.2). To vyžaduje zavedení vstupní veličiny tak, aby zobrazila neúplné znalosti jevu, který ovlivňuje měřené veličiny. V příkladu GUM,4.1.1, dodatečná vstupní veličina by mohla být potřebná k výpočtu známého nelineárního rozdělení teploty přes rezistor, možného nelineárního teplotního součinitele odporu nebo možné závislosti odporu na atmosférickém tlaku.

Poznámka:

Nicméně, rovnice (II.1) smí být tak elementární jako $Y = X_1 - X_2$. Tento výraz modeluje například porovnání dvou měření stejné veličiny X .

(GUM, 4.1.3) Množinu vstupních veličin X_1, X_2, \dots, X_N je možné členit na:

– veličiny, jejichž hodnoty a nejistoty jsou přímo určeny během aktuálního měření.

Tyto hodnoty a nejistoty mohou být získány například z jednoho pozorování, z opakovaných pozorování nebo úsudkem založeným na zkušenosti a mohou obsahovat určení korekce čtení přístroje a korekce ovlivňujících veličin, jako je teplota okolí, atmosférický tlak a vlhkost;

– veličiny, jejichž hodnoty a nejistoty jsou přenesené do postupu měření z vnějších zdrojů, jako jsou veličiny spojené s kalibračním měřením etalonů, certifikovanými referenčními materiály a referenčními daty získanými z příruček.

(GUM, 4.1.4) Odhad měřené veličiny Y , značené y , je získaný z rovnice (II.1) používající odhady vstupů x_1, x_2, \dots, x_N pro hodnoty N veličin X_1, X_2, \dots, X_N . Tedy odhad výstupu y , který je výsledkem měření, je dan rovnicí

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (\text{II.2})$$

Poznámka:

V některých případech, může být odhad y , získaný z:

$$y = \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_{1,k}, X_{2,k}, \dots, X_{N,k})$$

Což znamená, že y je vypočten jako aritmetický průměr nebo průměr (average) (viz GUM, 4.2.1) n nezávislých hodnot Y_k proměnné Y , kde každá hodnota obsahuje stejné nejistoty a každá je založena na kompletní množině zjištěných hodnot N vstupních veličin X_i , získaných současně. Takový způsob průměrování

$$y = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_N),$$

kde

$$\bar{X}_i = \left(\sum_{k=1}^n X_{i,k} \right) / n$$

(pro $k = 1, 2, \dots, n$) je aritmetický průměr jednotlivých pozorování $X_{i,k}$, může být preferovaný, když f je nelineární funkce vstupních veličin X_1, X_2, \dots, X_N , ale oba přístupy jsou identické, jestliže f je lineární funkcí X_i (viz GUM, H.2 a H.4).

(GUM, 4.1.5) Odhadnutá směrodatná odchylka spojená s odhadem hodnoty výstupu nebo výsledku měření y , nazývána *kombinovaná standardní nejistota* a označovaná $u_c(y)$, je určena z odhadu směrodatné odchylky každého odhadu vstupu x_i , nazývaného *standardní nejistota* a označovaného $u(x_i)$ (viz GUM, 3.3.5 a 3.3.6).

(GUM, 4.1.6) Každý odhad vstupu x_i a k němu připojená standardní nejistota $u(x_i)$ jsou získané z rozdělení možných hodnot vstupní veličiny X_i . Toto rozdělení pravděpodobnosti může být založeno na četnosti, tj. na sérii pozorování $X_{i,k}$ proměnné X_i ; nebo to může být *apriorní* rozdělení. Hodnocení složek standardní nejistoty způsobem A jsou založena na rozdělení četnosti, ale hodnocení způsobem B jsou založena na *apriorních* rozděleních. Je třeba připustit, že v obou případech rozdělení jsou modely použity pro vyjádření stavu našich znalostí.

6.3. Chyby měření, nejistota měření

Zdroje a druhy chyb měření

Chyby, vlivy a korekce, (GUM, 3.2)

Obecně měření obsahuje zdroje nepřesností, které způsobují vznik **chyby** výsledku měření. Tradiční pohled na chybu je, že je složena ze dvou složek, jmenovitě **náhodné** složky a **systematické** složky. (GUM, 3.2.1)

Poznámka:

Chyba je idealizovaný pojem a chyby nemohou být přesně známy.

Náhodná chyba pravděpodobně vzniká z nepředvídatelných nebo náhodně dočasných a prostorových kolísání ovlivňujících veličin. Vliv takových kolísání, dále označených jako *náhodné účinky*, způsobuje vznik změn v opakovaných pozorováních měřené veličiny. Ačkoliv není možné kompenzovat náhodnou chybu výsledku měření, může být obvykle snížena zvýšením počtu pozorování; její **střední hodnota** je nula. (GUM, 3.2.2)

Poznámky:

¹ *Výběrová směrodatná odchylka aritmetické střední hodnoty nebo průměru řady pozorování není náhodná chyba střední hodnoty, i když je tak označovaná v některých publikacích. Je to naopak míra nejistoty průměru v důsledku náhodných vlivů. Přesná hodnota chyby průměru vznikající z těchto vlivů nemůže být známa.*

² *Velká péče byla v tomto pokynu věnována rozlišení mezi termíny „chyba“ a „nejistota“. Nejsou to synonyma, ale vyjadřují zcela odlišné pojmy, proto mezi nimi nemá nastat záměna, ani nemají být chybně použity.*

Systematická chyba, jako náhodná chyba, nemůže být eliminována, ale může být často snížena. Jestliže systematická chyba vzniká ze známého vlivu jedné ovlivňující veličiny na výsledek měření, dále označený jako *systematický vliv*, pak tento vliv může být kvantifikován a pokud je významný, co do rozměru ve vztahu k požadované přesnosti měření, může být aplikována **korekce** nebo **korekční činitel** ke kompenzaci tohoto vlivu. Lze očekávat, že po

korekci bude předpokládána hodnota chyby, vyvolaná systematickým vlivem, nula. (GUM, 3.2.3)

Poznámka:

Nejistota korekce, aplikovaná na výsledek měření ke kompenzaci systematického vlivu není systematickou chybou, často nazývanou jednostranností výsledku měření způsobenou vlivem, kterým je někdy vyvolaná. Je to naopak míra nejistoty výsledku způsobená neúplnými znalostmi požadované hodnoty korekce. Obecně, chyba vznikající z nedokonalé kompenzace systematického vlivu nemůže být exaktně známá. Termíny „chyba“ a „nejistota“ mají být vhodně použity a má se dbát na rozlišení mezi nimi.

Předpokladem je, že výsledek měření byl korigován na všechny pozorované významné systematické vlivy a bylo podniknuto vše pro zjištění těchto vlivů. (GUM, 3.2.4)

Příklad:

Korekce z důvodu konečné impedance voltmetru použitého k určení elektrického napětí (měřená veličina) vysoko-impedančního rezistoru, je aplikovaná na snížení systematického vlivu na výsledek měření způsobený zatěžovacím vlivem voltmetru. Avšak, impedanční hodnoty voltmetru a rezistoru, které jsou použity k určení hodnoty korekce a které jsou získány z jiných měření, jsou samy o sobě nepřesné. Tyto nejistoty jsou použity k hodnocení složky nejistoty elektrického napětí vznikajícího z korekce a dále ze systematického vlivu způsobeného omezenou impedancí voltmetru.

Poznámky:

¹ *Měřicí přístroje a systémy jsou často justovány nebo kalibrovány pomocí etalonů a referenčních materiálů k odstranění systematických vlivů; avšak musí se stále brát v úvahu nejistoty spojené s těmito etalony a materiály.*

² *Případ, kde korekce známého významného systematického vlivu není použita, je vysvětlen v poznámce k GUM, 6.3.1 a v F.2.4.5. Jedná se o zahrnutí tohoto vlivu rozšířením „nejistoty“ připsované výsledku.*

6.4. Zdroje nejistoty měření

(GUM, 3.3.2) V praxi, je mnoho možných zdrojů nejistoty měření zahrnujících:

- a) neúplné definování měřené veličiny
- b) nedokonalé definování měřené veličiny;
- c) nereprezentativní vzorkování – měřený vzorek nemusí reprezentovat definovanou měřenou veličinu;
- d) nedostatečnou znalost vlivů podmínek okolního prostředí na měření nebo nedokonalé měření podmínek okolního prostředí;
- e) osobní jednostrannost správnosti odečítání na analogových přístrojích;
- f) konečné rozlišení přístroje nebo prahová citlivost
- g) nepřesné hodnoty etalonů měření nebo referenčních materiálů;
- h) nepřesné hodnoty konstant a dalších parametrů získané z vnějších zdrojů a použité v algoritmu redukce dat
- i) aproximace a předpoklady začleněné do metody a postupu měření;
- j) kolísání v opakovaných pozorováních měřené veličiny za zdánlivě identických podmínek.

Tyto zdroje nejsou nutně vzájemně závislé a některé zdroje a) až i) mohou přispívat ke zdroji j). Samozřejmě, že nepozorovaný systematický vliv nemůže být brán v úvahu při hodnocení nejistoty výsledku měření, ale přispívá k hodnotě její chyby.

Nejistoty typu A a typu B

(GUM, 3.3.3) Doporučení INC-1(1980), pracovní skupiny pro pojem nejistota, rozdělilo složky nejistoty do dvou kategorií, „A“ a „B“, a to s ohledem na metody jejich hodnocení. Tyto kategorie platí pro *nejistotu* a nenahrazují slova „náhodný“ a „systematický“. Nejistotu korekce známého systematického vlivu je dovoleno v některých případech získat hodnocením typu A a v jiných případech hodnocením typu B, jak dovoluje nejistota charakterizující náhodný vliv.

Poznámka:

V některých publikacích jsou složky nejistoty rozdělené na „náhodné“ a „systematické“ a jsou spojovány s chybami vznikajícími z náhodných vlivů a známých systematických vlivů. Taková kategorizace složek nejistoty může mít při obecném použití více významů. Například „náhodná“ složka nejistoty při jednom měření by mohla být při dalším měření „systematickou“ složkou nejistoty, jestliže výsledek prvního měření je použit jako vstupní údaj. Kategorizaci metod hodnocení složek nejistoty, spíše než samotných složek, se můžeme vyvarovat takové dvojznačnosti. Zároveň individuální složky, které byly hodnoceny dvěma odlišnými metodami v rámci určených skupin, nejsou vyloučeny z použití pro určité účely (viz GUM, 3.4.3).

(GUM, 3.3.4) Účelem klasifikace typu A a typu B je indikace dvou odlišných cest, jak vyhodnotit složky nejistoty, které slouží pouze pro ulehčení tohoto výkladu; tato klasifikace neznamená, že existuje nějaký rozdíl v povaze složek vznikajících z těchto dvou typů hodnocení. Oba typy hodnocení jsou postavené na **rozdělení pravděpodobností** a složky nejistot vyplývající z obou typů jsou klasifikovány rozptyly nebo směrodatnými odchylkami.

(GUM, 3.3.5) Odhadnutý rozptyl u^2 , charakterizující složky nejistoty získané z hodnocení způsobem A, je vypočítán z řady opakovaných pozorování a to je známý statistický odhad rozptylu s^2 . Odhadnutá **směrodatná odchylka** u , kladná hodnota druhé odmocniny u^2 , je tak $u = s$ a pro úplnost je někdy nazývána *standardní nejistotou typu A*. Pro složky nejistoty získané z hodnocení způsobem B, je odhadnutý rozptyl u^2 vyhodnocen pomocí dostupných znalostí a odhadnutá směrodatná odchylka u je někdy nazývána *standardní nejistotou typu B*.

Tedy standardní nejistota typu A je získaná z **hustoty pravděpodobnosti**, získané z **pozorovaného rozdělení četnosti**, zatímco standardní nejistota typu B je získaná z předpokládané hustoty pravděpodobnosti, určené na základě stupně přesvědčení, že jev se bude vyskytovat [často se nazývá subjektivní **pravděpodobnost**]. Oba postupy se používají při uznávaných interpretacích pravděpodobností.

Poznámka:

Hodnocení složek nejistoty typem B je obvykle založeno na oblasti porovnatelných spolehlivých informací.

(GUM, 3.3.6) Standardní nejistota výsledku měření, pokud je výsledek získán z hodnot řady dalších veličin, je nazývána *kombinovaná standardní nejistota* a označena u_c . Je to odhadnutá směrodatná odchylka spojená s výsledkem a je rovna kladné hodnotě druhé odmocniny

kombinovaného rozptylu, získaného ze všech složek rozptylu a **kovariance**, za předpokladu, že vyhodnocení je na základě požadavků *zákona o šíření nejistoty*, který je uveden v tomto pokynu.

(GUM, 3.3.7) *Rozšířená nejistota* U získaná násobením kombinované standardní nejistoty u_c *činitelem rozšíření* k , je určena pro splnění potřeb některých průmyslových a obchodních aplikací, stejně jako požadavků v oblasti zdravotnictví a bezpečnosti. Zamýšleným účelem rozšířené nejistoty U je poskytnout interval výsledku měření, ve kterém je očekávaný předpoklad, že bude obsahovat velký podíl hodnot, které by mohly být přiměřeně přiřazeny k měřené veličině. Výběr činitele k , který je obvykle v rozsahu 2 až 3, je založen na pravděpodobnosti pokrytí nebo požadované konfidenční úrovni intervalu.

Poznámka:

Činitel rozšíření k je vždy stanovený tak, aby standardní nejistota měřené veličiny mohla být obnovena pro použití ve výpočtu kombinované standardní nejistoty jiných výsledků měření, které smí záviset na této veličině.

Jestliže se změní všechny veličiny, na kterých závisí výsledek měření, potom jeho nejistota může být hodnocena statistickými prostředky. Avšak z důvodu toho, že je to v praxi zřídka možné s ohledem na omezenost času a zdrojů, je nejistota obvykle hodnocena použitím matematického modelu měření a zákona o šíření nejistoty. Proto je v tomto pokynu, implicitní předpoklad, že měření může být matematicky modelováno v závislosti na požadovaném stupni přesnosti měření.

6.5. Vyjadřování nejistot měření

6.5.1. Nejistoty typu A

Hodnocení standardní nejistoty způsobem A, (GUM, 4.2.1)

V mnoha případech nejlepší dostupný odhad pravděpodobné nebo očekávané hodnoty μ_q veličiny q , která se náhodně mění a pro kterou n nezávislých pozorování q_k bylo získáno za stejných podmínek měření, je **aritmetický průměr** nebo **průměrná hodnota** \bar{q} všech n pozorování:

$$\bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q_k \quad (\text{II.3})$$

Takže, pro vstupní veličinu X_i odhadnutou z n nezávislých opakovaných pozorování $X_{i,k}$ je použit aritmetický průměr \bar{X}_i získaný z funkce (II.3) jako odhad vstupní hodnoty x_i v rovnici (II.2) pro určení výsledku měření y ; tj $x_i = \bar{X}_i$. Odhady vstupů, které nejsou vyhodnoceny z opakovaných pozorování, musí být získány jinými metodami, jako tou která je uvedena ve druhé kategorii GUM, 4.1.3.

(GUM, 4.2.2) Jednotlivá pozorování q_k se liší v hodnotách z důvodu náhodného kolísání ovlivňujících veličin nebo z důvodu náhodných vlivů. Experimentální rozptyl pozorování, který je odhadem rozptylu σ^2 rozdělení pravděpodobnosti q , je v rovnici:

$$s^2(q_k) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})^2 \quad (\text{II.4})$$

Tento odhad rozptylu a jeho kladná druhá odmocnina $s(q_k)$, nazývaná **výběrová směrodatná odchylna**, charakterizují proměnlivost hodnot pozorování q_k nebo přesněji, jejich rozptyl kolem jejich průměru \bar{q} .

(GUM, 4.2.3) Nejlepší odhad $\sigma^2(\bar{q}) = \sigma^2/n$ rozptylu průměru je dán následující funkcí:

$$s^2(\bar{q}) = \frac{s^2(q_k)}{n} \quad (\text{II.5})$$

Experimentální rozptyl průměru $s^2(\bar{q})$ a **výběrová směrodatná odchylna střední hodnoty** $s(\bar{q})$, rovnající se kladné hodnotě druhé odmocniny $s^2(\bar{q})$, kvantifikují jaká je \bar{q} úroveň odhadu očekávané hodnoty μ_q proměnné q , přičemž kterýkoliv z obou je dovoleno použít jako míru nejistoty \bar{q} .

Pro vstupní veličinu X_i určenou z n nezávislých opakovaných pozorování $X_{i,k}$, je standardní nejistota $u(x_i)$ jejího odhadu $x_i = \bar{X}_i$, $u(x_i) = s(\bar{X}_i)$ s variancí $s^2(\bar{X}_i)$ vypočtenou podle rovnice (II.5). Pro úplnost, $u^2(\bar{X}_i) = s^2(\bar{X}_i)$ a $u(x_i) = s(\bar{X}_i)$ jsou někdy nazývány *rozptylem typu A* a *standardní nejistotou typu A*.

Poznámky:

¹ Počet pozorování n musí být dostatečně velký, aby \bar{q} poskytla spolehlivý odhad očekávané hodnoty μ_q náhodné veličiny q , a aby $s^2(\bar{q})$ poskytla spolehlivý odhad rozptylu $\sigma^2(\bar{q}) = \sigma^2/n$. Rozdíl mezi $s^2(\bar{q})$ a $\sigma^2(\bar{q})$ musí být brán v úvahu při vytváření konfidenčních intervalů. V případě, že rozdělení pravděpodobnosti proměnné q je normální rozdělení, rozdíl musí být brán na zřetel použitím t -rozdělení.

² Přestože rozptyl $s^2(\bar{q})$ je podstatnější veličina, směrodatná odchylna $s(\bar{q})$ je v praxi výhodnější, protože má stejné rozměry jako q a hodnotu jednodušší na pochopení, než rozptyl.

(GUM, 4.2.4) Pro dobře popsané měření pod statistickou kontrolou, je dovolen jako užitečný použit sdružený odhad rozptylu s_p^2 (nebo sdruženou výběrovou směrodatnou odchylku s_p), které charakterizují měření. V těchto případech, pokud je hodnota měřené veličiny q určena z n nezávislých pozorování, výběrový rozptyl aritmetického průměru q je odhadnut lépe pomocí s_p^2/n než $s^2(\bar{q})/n$. Pro standardní nejistotu platí potom

$$u = s_p/\sqrt{n}$$

(Viz také poznámka GUM, H.3.6).

Poznámka k GUM, H.3.6:

Sdružený odhad rozptylu s_p^2 na základě N nezávislých pozorování stejné náhodné veličiny je získán z

$$s_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^N v_i s_i^2}{\sum_{i=1}^N v_i}$$

kde s_i^2 je výběrový rozptyl i -té řady n_i opakovaných nezávislých pozorování [rovnice (4) v GUM, 4.2.2] a má $v_i = n_i - 1$ stupňů volnosti. Počet stupňů volnosti pro s_p^2 je

$$v = \sum_{i=1}^N v_i$$

Výběrový rozptyl s_p^2/m (a výběrová směrodatná odchylka s_p/\sqrt{m}) aritmetického průměru m nezávislých pozorování charakterizovaných sdruženým odhadem rozptylu s_p^2 má také v stupňů volnosti.

6.5.2. Nejistoty typu B

Hodnocení standardní nejistoty způsobem B

(GUM, 4.3.1) Pro odhad x_i vstupní veličiny X_i , který nebyl získaný z opakovaných pozorování, je odhad rozptylu $u^2(x_i)$ nebo standardní nejistoty $u(x_i)$ hodnocený odborným úsudkem, založeným na všech dosažitelných informacích týkajících se možné proměnlivosti X_i . Je dovoleno, že sdružení informací zahrnuje

- dřívější měřená data
- zkušenosti nebo obecnou znalost chování a vlastností relevantních materiálů a přístrojů;
- specifikace výrobce
- poskytnutá data při kalibraci a ostatní certifikaci;
- nejistoty připisované referenčním datům převzatým z technických příruček. Pro úplnost $u^2(x_i)$ a $u(x_i)$ vyhodnocené touto cestou jsou někdy nazývány jako *rozptyl typu B* a *standardní nejistota typu B*.

Poznámka:

Když x_i je získáno z apriorního rozdělení, jeho rozptyl je správně zapsán jako $u^2(X_i)$, ale pro zjednodušení jsou v tomto pokynu použity $u^2(x_i)$ a $u(x_i)$.

(GUM, 4.3.2) Správné použití sdružení dostupných informací o hodnocení standardní nejistoty způsobem B se zakládá na zkušenostech a obecných znalostech, avšak je to také schopnost, která může být naučena praxí. Má se uznávat, že hodnocení standardní nejistoty způsobem B může být stejně spolehlivě jako hodnocení způsobem A a to zvláště v situaci měření, kde hodnocení způsobem A je založeno na poměrně malém počtu statisticky nezávislých pozorování.

Poznámka:

Jestliže rozdělení pravděpodobnosti q v poznámce 1 k GUM, 4.2.3 je normální rozdělení, potom $\sigma[s(\bar{q})]/\sigma(\bar{q})$, směrodatná odchylka $s(\bar{q})$ v poměru k $\sigma^2(\bar{q})$, je přibližně $[2(n-1)]^{-1/2}$. Tedy je-li brána $\sigma[s(\bar{q})]$ jako nejistota $s(\bar{q})$, pro $n = 10$ pozorování, pak relativní nejistota obsažená v $s(\bar{q})$ je 24 %, avšak pro $n = 50$ pozorování je 10 %. (Další hodnoty jsou uvedeny v tabulce E.1 v příloze GUM, E.)

(GUM, 4.3.3) Jestliže odhad x_i převzatý z dat výrobce, certifikátů kalibrace, technické příručky nebo jiného zdroje a jeho uvedená nejistota jsou stanoveny jako daný násobek směrodatné odchylky, standardní nejistota $u(x_i)$ je uvedená hodnota dělená násobitelem a odhad rozptylu $u^2(x_i)$ je druhá mocnina tohoto podílu.

Příklad:

V kalibračním certifikátu se stanoví, že hmotnost etalonu z korozivzdorné oceli m_s se jmenovitou hodnotou jeden kilogram, je 1 000,000 325 g a nejistota této hodnoty je 240 μg při úrovni trojnásobku směrodatné odchylky. Směrodatná odchylka pro etalon hmotnosti je

potom $u(m_s) = (240 \mu\text{g})/3 = 80 \mu\text{g}$. To odpovídá relativní standardní nejistotě $u(m_s)/m_s$ ve výši 80×10^{-9} (viz. 5.1.6). Odhad rozptylu je $u^2(m_s) = (80 \mu\text{g})^2 = 6,4 \times 10^{-9} \text{ g}^2$.

Poznámka:

V mnoha případech jsou malé nebo žádné informace o jednotlivých složkách, ze kterých je získaná uvedená nejistota. Obecně to není důležité pro vyjádření nejistoty, pokud postupujeme v souladu s tímto pokynem, protože všechny standardní nejistoty jsou zpracovány stejným způsobem použitým pro výpočet kombinované standardní nejistoty výsledku měření (viz GUM kapitola 5).

(GUM, 4.3.4) Uvedená nejistota x_i není nezbytně dána jako násobek směrodatné odchylky podle GUM, 4.3.3. Spíše je možné, že uvedená nejistota se určuje v intervalu, který má 90 %, 95 % nebo 99 % konfidenční úroveň (viz GUM, 6.2.2). Předpokládá se, pokud není jinak uvedeno, že bylo použito **normální rozdělení** (GUM, C.2.14) pro výpočet uvedené nejistoty a k získání standardní nejistoty x_i dělením uvedené nejistoty vhodným činitelem normálního rozdělení. Činitele odpovídající výše uvedeným konfidenčním úrovním jsou 1,64; 1,96 a 2,58 (viz. také tabulka G.1. v příloze GUM, G).

Poznámka:

Takový předpoklad není nutný, jestliže nejistota bude uvedena v souladu s doporučením tohoto pokynu ohledně záznamu, který zdůrazňuje, že použitý činitel rozšíření je vždy uveden (viz. GUM, 7.2.3).

Příklad:

Kalibrační certifikát uvádí, že odpor etalonového rezistoru R_S jmenovité hodnoty 10Ω je $10,000\,742 \Omega \pm 129 \mu\Omega$ při $23 \text{ }^\circ\text{C}$, a že „uvedená nejistota $129 \mu\Omega$ určuje interval, který má konfidenční úroveň 99 %“. Standardní nejistotu rezistoru je dovoleno brát jako $u(R_S) = (129 \mu\Omega)/2,58 = 50 \mu\Omega$, což odpovídá relativní standardní nejistotě $u(R_S)/R_S$ ve výši $5,0 \times 10^{-6}$ (viz GUM, 5.1.6). Odhad rozptylu je $u^2(R_S) = (50 \mu\Omega)^2 = 2,5 \times 10^{-9} \Omega^2$.

(GUM, 4.3.5) Je možné uvážit případ, kdy na základě dostupných informací je možno stanovit, že „existuje 50 % šance, že hodnota vstupní veličiny X_i leží uvnitř intervalu od a_- do a_+ “ (jinými slovy, pravděpodobnost, že X_i leží uvnitř tohoto intervalu je 0,5 nebo 50 %). Pokud se může předpokládat, že rozdělení možných hodnot X_i je přibližně normální, potom nejlepší odhad x_i pro X_i je možno brát jako střední bod intervalu. Dále, pokud je polovina šířky intervalu označena $a = (a_+ - a_-)/2$, je možno předpokládat $u(x_i) = 1,48a$, protože pro normální rozdělení s očekávanou hodnotou μ a směrodatnou odchylkou σ intervalu je $\mu \pm \sigma/1,48$ a zahrnuje přibližně 50 % rozdělení.

Příklad:

Mechanik určující rozměry jedné části předpokládá, že její délka je s pravděpodobností 0,5 v intervalu $10,07 \text{ mm}$ až $10,15 \text{ mm}$ a uvádí, že $l = (10,11 \pm 0,04) \text{ mm}$, což znamená, že $0,04 \text{ mm}$ určuje interval, který má konfidenční úroveň 50 %. Potom $a = 0,04 \text{ mm}$ a za předpokladu normálního rozdělení možných hodnot l , standardní nejistota délky je $u(l) = 1,48 \times 0,04 \text{ mm} \approx 0,06 \text{ mm}$ a odhad rozptylu $u^2(l) = (1,48 \times 0,04 \text{ mm})^2 = 3,5 \times 10^{-3} \text{ mm}^2$.

(GUM, 4.3.6) Je možné uvážit případ, uvedený v GUM, 4.3.5, kde na základě dostupných informací je možno stanovit, že „existuje šance 2 ze 3, že hodnota X_i leží uvnitř intervalu od a_- do a_+ “ (jinými slovy, pravděpodobnost, že X_i leží uvnitř tohoto intervalu je zhruba 0,67). Je

možné brát $u(x_i) = a$, protože pro normální rozdělení s očekávanou hodnotou μ a směrodatnou odchylkou σ , interval $\mu \pm \sigma$ pokryje 68,3 % rozdělení.

Poznámka:

Hodnotě $u(x_i)$ by mohlo být dáno podstatně více významů, než ji zřejmě přísluší, pokud se použije aktuální normální odchylka 0,967 42 odpovídající pravděpodobnosti $p = 2/3$, tj. pokud $u(x_i) = a/0,967 42 = 1,033 a$.

(GUM, 4.3.7) V dalších případech je dovoleno odhadnout pouze hranice (horní a dolní mezní rozměr) pro X_i , zvláště při konstatování: „pravděpodobnost, že hodnota X_i leží v intervalu od a_- do a_+ pro všechny praktické účely je rovna 1 a pravděpodobnost, že X_i leží mimo tento interval je v podstatě 0“. Jestliže neexistují *speciální znalosti* ohledně možných hodnot X_i uvnitř intervalu, pak se může pouze předpokládat, že je stejně pravděpodobné pro X_i , aby ležela kdekoliv

uvnitř intervalu (rovnoměrné nebo pravoúhlé rozdělení možných hodnot – viz GUM, 4.4.5 a Obrázek II.3). Potom x_i , očekávaná hodnota X_i , je střední bod intervalu $x_i = (a_- + a_+)/2$, s příslušným rozptylem

$$u^2(x_i) = (a_+ - a_-)^2/12 \quad (\text{II.6})$$

Jestliže rozdíl mezi hranicemi $a_+ - a_-$ je označený $2a$, pak rovnice (6) přejde do tvaru:

$$u^2(x_i) = a^2/3 \quad (\text{II.7})$$

(GUM, 4.3.8) V GUM, 4.3.7 horní a dolní meze a_+ a a_- pro vstupní veličinu X_i nemusí být symetrické s ohledem na nejlepší odhad x_i . Přesněji, jestliže dolní mez je stanovena jako $a_- = x_i - b_-$ a horní mez je $a_+ = x_i + b_+$, potom $b_- \neq b_+$. Protože v tomto případě x_i (předpokládaná jako nejlepší odhad X_i) není uprostřed intervalu mezi a_+ a a_- , rozdělení pravděpodobnosti X_i nemůže být rovnoměrné přes celý interval. Pokud není dostupný dostatek informací pro výběr vhodného rozdělení, rozdílné modely povedou k rozdílnému vyjádření rozptylu. Při nedostatku takových informací nejjednodušším přiblížením je

$$u^2(x_i) = \frac{(b_+ + b_-)^2}{12} = \frac{(a_+ + a_-)^2}{12} \quad (\text{II.8})$$

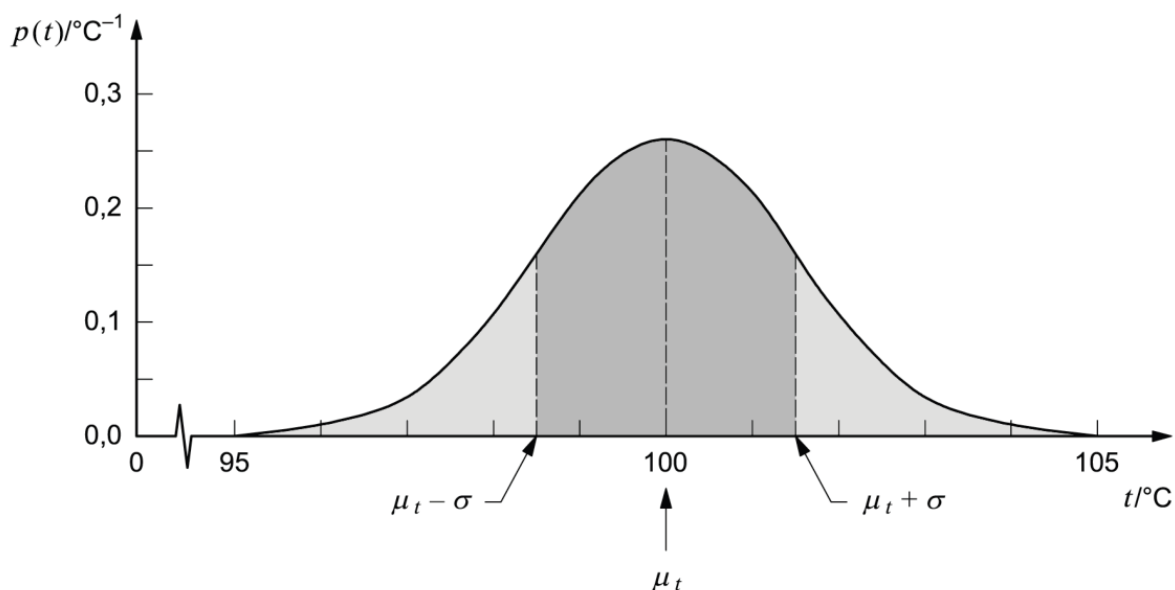
jež je rozptylem pravoúhlého rozdělení s celou šířkou $b_+ + b_-$. (Asymetrické rozdělení je také vysvětleno v GUM, F.2.4.4 a G.5.3).

(GUM, 4.4.2) Na Obrázku II.2 je předpoklad, že vstupní veličina X_i je teplota t a její neznámé rozdělení je normální rozdělení s očekávanou hodnotou $\mu = 100$ °C a směrodatnou odchylkou $\sigma = 1,5$ °C. Její hustota pravděpodobnosti (viz. GUM, C.2.14) je tedy

$$p(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{t - \mu_t}{\sigma} \right)^2 \right]$$

Poznámka:

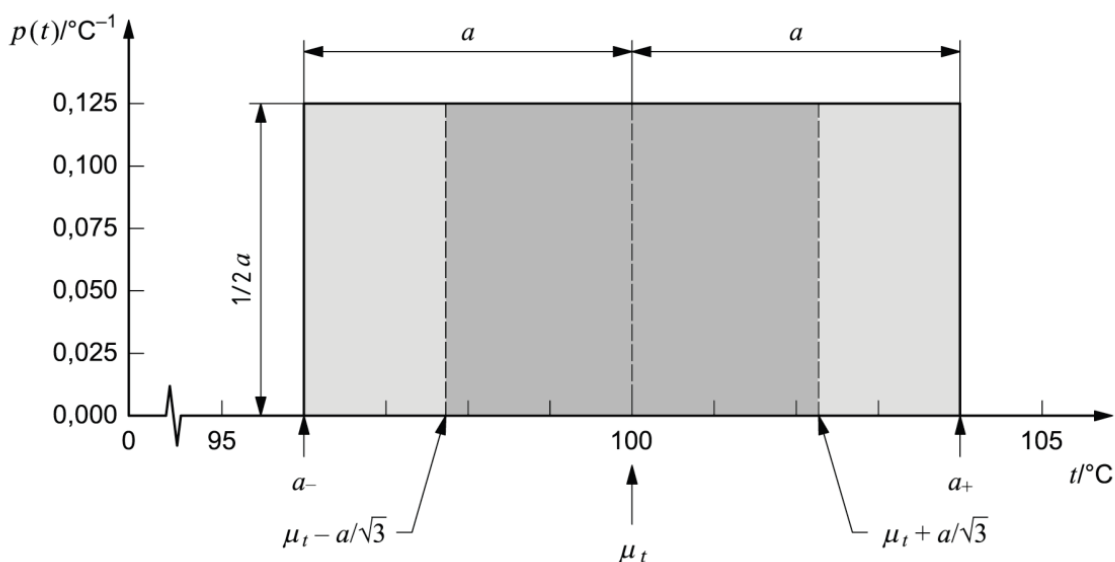
Definice hustoty pravděpodobnosti $p(z)$ vyžaduje, aby vyhověla vztahu $\int p(z) dz = 1$.



Obrázek II.2. Grafické znázornění výpočtu standardní nejistoty vstupní veličiny z opakovaných pozorování

(GUM, 4.4.5) V případě znázorněném na Obrázku II.3 se předpokládá, že je velmi málo informací dostupných ohledně vstupní veličiny t . Vše, co lze udělat, je to, že se předpokládá, že t má symetrické pravouhlé *apriorní* rozdělení pravděpodobnosti mající dolní mez $a_- = 96$ °C a horní mez $a_+ = 104$ °C a tedy poloviční šířka $a = (a_+ - a_-)/2 = 4$ °C (viz GUM, 4.3.7). Hustota pravděpodobnosti t je tedy $p(t) = 1/2a$ pro $a_- \leq t \leq a_+$, $p(t) = 0$ ve všech ostatních případech.

Jak je uvedeno v GUM, 4.3.7, nejlepší odhad proměnné t je její očekávaná hodnota $\mu_t = (a_+ + a_-)/2 = 100$ °C. Toto vyplývá z GUM, C.3.1. Standardní nejistota tohoto odhadu je $u(\mu_t) = a/\sqrt{3} \approx 2,3$ °C, což vyplývá z GUM, C.3.2 [viz. rovnice (II.7)].



Obrázek II.3. Grafické znázornění výpočtu standardní nejistoty vstupní veličiny z apriorního rozdělení.

6.6 Kombinovaná standardní nejistota

Určení kombinované standardní nejistoty

6.6.1 Nekorelované vstupní veličiny

(GUM, 5.1) Tato část se zabývá vstupními veličinami, které jsou navzájem **nezávislé** (GUM, C.3.7).

(GUM, 5.1.1) Standardní nejistota y , kde y je odhad měřené veličiny Y a tedy výsledek měření, je získána vhodnou kombinací standardních nejistot odhadů vstupů x_1, x_2, \dots, x_N (viz GUM, 4.1). Tato kombinovaná standardní nejistota odhadu y je označena $u_c(y)$.

Poznámka:

Z podobných důvodů, jaké jsou uvedeny v poznámce k GUM, 4.3.1, jsou značky $u_c(y)$ a $u_c^2(y)$ použity ve všech případech.

(GUM, 5.1.2) Kombinovaná standardní nejistota $u_c(y)$ je kladná hodnota druhé odmocniny kombinovaného rozptylu $u_c^2(y)$, který je získán z

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right]^2 u^2(x_i) \quad (\text{II.10})$$

kde f je funkce daná rovnicí (II.1). Každá $u(x_i)$ je standardní nejistota vyhodnocená jak je popsáno v GUM, 4.2 (hodnocení způsobem A) nebo v GUM, 4.3 (hodnocení způsobem B). Kombinovaná standardní nejistota $u_c(y)$ je odhad směrodatné odchylky a charakterizuje rozptýlení hodnot, které by mohly odůvodněně být přiřazeny měřené veličině Y (viz GUM, 2.2.3).

Rovnice (II.10) a její protějšek pro korelované vstupní veličiny, rovnice (II.13), jsou obě založeny na aproximaci lineární Taylorovy řady pro $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$, vyjadřující to, co je v tomto pokynu zákon o šíření nejistoty (viz GUM, E.3.1 a E.3.2).

Poznámka:

Pokud je nelinearita f významná, členy vyššího řádu rozšířené Taylorovy řady musí být zahrnuty do výrazu pro $u_c^2(y)$, rovnice (II.10). Když rozdělení každé X_i je symetrické kolem své střední hodnoty, pak nejdůležitějšími členy vyššího řádu, které jsou přidány k členům rovnice (II.10), jsou

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right]^2 + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_i \partial x_j^2} \right] u^2(x_i) u^2(x_j)$$

Příklad situace, kde příspěvek členů vyššího řádu k $u_c^2(y)$ je nutné brát v úvahu, viz GUM, H.1.

(GUM, 5.1.3) Parciální derivace $\partial f / \partial x_i$ jsou rovny $\partial f / \partial X_i$ vyhodnocené z $X_i = x_i$ (viz. níže uvedená poznámka 1). Tyto derivace, často značené jako koeficienty citlivosti, vysvětlují, jak

se odhad výstupu y mění v závislosti na změnách hodnot vstupních odhadů x_1, x_2, \dots, x_N . Zvláště změna y vytvořená malými změnami Δx_i odhadu vstupu x_i je daná vztahem $(\Delta y_i) = (\partial f / \partial x_i)(\Delta x_i)$. Jestliže tato změna je vytvářena standardní nejistotou odhadu x_i , pak odpovídající rozptyl y je $(\partial f / \partial x_i) u(x_i)$. Kombinovaný rozptyl $u_c^2(y)$ může být znázorněn jako součet členů, z nichž každý vyjadřuje rozptyl příslušný odhadu výstupu y , vytvořený odhadem rozptylu příslušného odhadu vstupu x_i . To vede k zápisu rovnice (II.10)

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N [c_i u(x_i)]^2 \equiv \sum_{i=1}^N u_i^2(y) \quad (\text{II.11})$$

kde

$$c_i \equiv \partial f / \partial x_i, \quad u_i(y) \equiv |c_i| u(x_i) \quad (\text{II.12})$$

Poznámka:

¹ Přesně řečeno, parciální derivace $\partial f / \partial x_i = \partial f / \partial X_i$ jsou hodnoceny z předpokládaných hodnot X_i . Avšak v praxi jsou parciální derivace odhadnuty následně:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial X_i} \Big|_{x_1, x_2, \dots, x_N}$$

(GUM, 5.1.4) Místo výpočtu z funkce f , jsou koeficienty citlivosti $\partial f / \partial x_i$ někdy určovány experimentálně mírou změny Y vyvolané změnami jednotlivých X_i , zatímco zbývající vstupní veličiny se udržují konstantní. V tomto případě, znalost funkce f (nebo její části, když jsou takto určovány pouze některé činitele citlivosti) je odpovídajícím způsobem redukována na empirickém rozvoji lineární Taylorovy řady postaveném na základě měření koeficientů citlivosti.

6.6.2 Korelované vstupní veličiny

Korelované vstupní veličiny, (GUM, 5.2)

(GUM, 5.2.1) Rovnice (II.10) a ostatní, které jsou z nich odvozovány jako například rovnice (II.11) a (II.12) jsou platné pouze v případě, že vstupní veličiny X_i jsou nezávislé nebo nekorelované (náhodné veličiny a nefyzikální veličiny, o kterých se předpokládá, že jsou neměnné – viz GUM, 4.1.1, poznámka 1). Jestli některé z X_i jsou významně korelované, tak korelace musí být brána v úvahu.

(GUM, 5.2.2) Pokud jsou vstupní veličiny korelované, tak nejvhodnější vyjádření kombinovaného rozptylu $u_c^2(y)$ spojeného s výsledkem měření je

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right]^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) \quad (\text{II.13})$$

kde x_i a x_j jsou odhady X_i a X_j a $u(x_i, x_j) = u(x_j, x_i)$ je odhad kovariance k x_i and x_j .

Stupeň korelace mezi x_i a x_j je charakterizován odhadem **korelačního koeficientu** (GUM, C.3.6)

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)} \quad (\text{II.14})$$

kde $r(x_i, x_j) = r(x_j, x_i)$, $-1 \leq r(x_i, x_j) \leq +1$. Jestliže odhady x_i a x_j jsou nezávislé, tak $r(x_i, x_j) = 0$ a změna jednoho nevyvolává předpokládanou změnu druhého (viz další vysvětlení v GUM, C.2.8, C.3.6 a C.3.7).

Pomocí korelačních koeficientů, které jsou snadněji vysvětlitelné než kovariance, je člen kovariance v rovnici (II.13) dovoleno psát takto

$$2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j) \quad (\text{II.15})$$

Z rovnice (II.13) bude za pomoci rovnice (II.12)

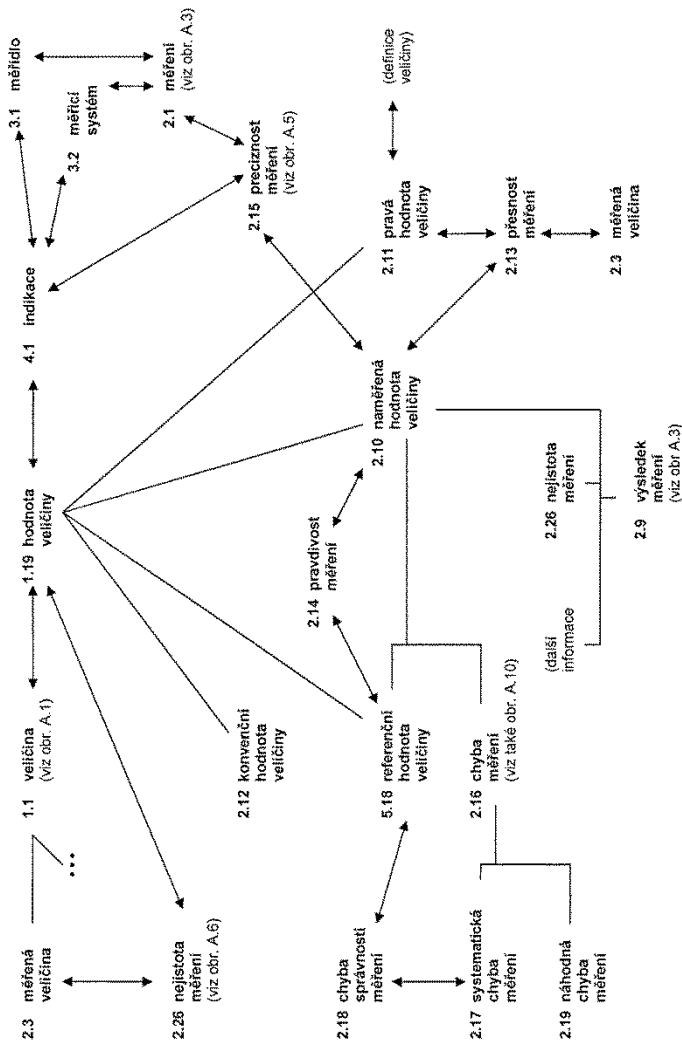
$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N c_i^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N c_i c_j u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j) \quad (\text{II.16})$$

Poznámka:

¹ Ve zvláštním případě, kde všechny odhady vstupů jsou korelované s korelačními koeficienty $r(x_i, x_j) = +1$, rovnice (II.16) se redukuje na

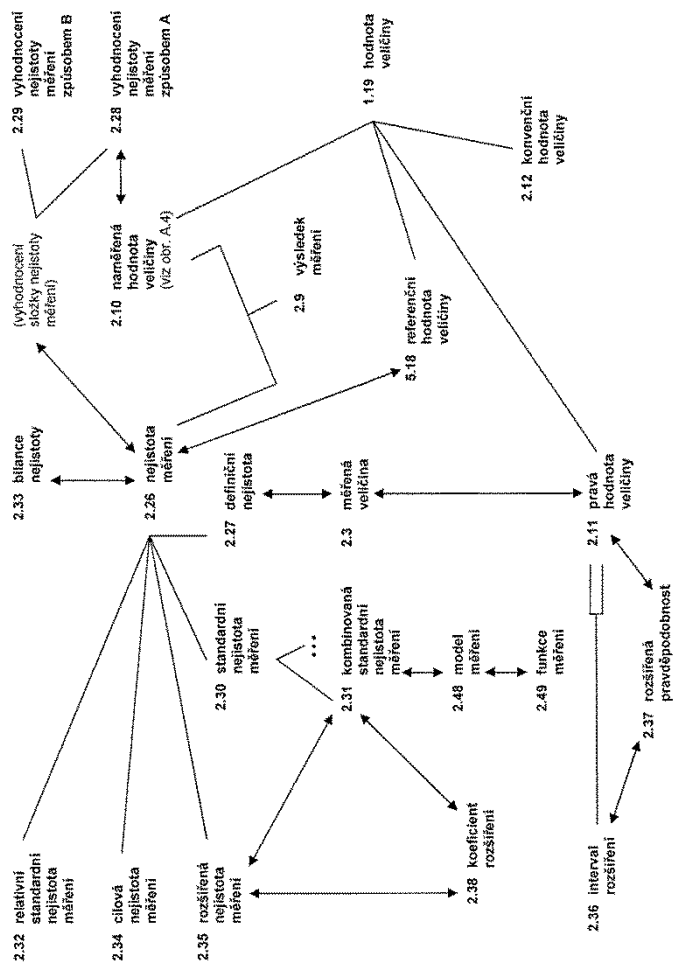
$$u_c^2(y) = \left[\sum_{i=1}^N c_i u(x_i) \right]^2 = \left[\sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} u(x_i) \right]^2$$

6.6.3 Pojmové diagramy: některé základní pojmy a jejich vztahy



Obrázek A.4 – Pojmový diagram pro část kapitoly 2 okolo pojmu „hodnota veličiny“

Obrázek II.4: Pojmy svázané s pojmem „hodnota veličiny“. Převzato z dokumentu [11].



Obrázek A.6 – Pojmový diagram pro část kapitoly 2 okolo pojmu „nejistota měření“

Obrázek II.5: Pojmy svázané s pojmem „nejistota měření“. Převzato z dokumentu [11].

Literatura

- [1] IAEA TRS 398 Absorbed dose determination in external beam radiotherapy. An international code of practice for dosimetry based on standards of absorbed dose to water. Český překlad:
https://www.sujb.cz/fileadmin/sujb/docs/Fin_TRS398_cz_opr.pdf
- [2] IAEA TECDOC 1274 Calibration of photon and beta ray sources used in brachytherapy.
http://www-pub.iaea.org/MTCD/publications/PDF/te_1274_prn.pdf
- [3] Kontrola kvality radiodiagnostických vyšetření ve stomatologii. Zubní rentgeny pro intraorální snímkování – kontrolované komponenty a parametry pro řízení kvality provozu. SÚJB 2002. Dostupné na adrese
http://www.sujb.cz/fileadmin/sujb/docs/dokumenty/publikace/MP_stomatologie_kontrola_kvality.pdf
- [4] EA - 4/02 M:2013 Vyjádření nejistoty měření při kalibraci. ČIA o.p.s., Praha, duben 2014. Dostupné na <http://www.cia.cz/akreditace/laboratore/kalibracni-laboratore.aspx> jako dokument EA, <http://www.cia.cz/Download.ashx?Type=Document&Id=16811>
- [5] D.R. White, P. Saunders: The propagation of uncertainty on interpolated scales, with examples from thermometry. Metrologia, Vol. 37 (2000), p. 285-293
- [6] IAEA TRS 457 Dosimetry in diagnostic radiology: an international code of practice.
http://www-pub.iaea.org/MTCD/publications/PDF/TRS457_web.pdf
- [7] Pokyny k uvádění shody se specifikací, ILAC-G8:03/2009, dokument ČIA (Český institut pro akreditaci, o.p.s.), dostupný jako dokument ILAC
<http://www.cia.cz/Download.ashx?Type=Document&Id=16827>
- [8] Evaluation of measurement data - Guide to the expression of uncertainty in measurement, JCGM 100:2008, GUM 1995 with minor corrections.
- [9] International vocabulary of Metrology – Basic and general concepts and associated terms (VIM), JCGM 200:2008.
- [10] Pokyn pro vyjadřování nejistoty měření (GUM). Sborníky technické harmonizace, ÚNMZ, Praha, 2012. [www.unmz.cz/files/Sborniky_TH/GUM - celek -DEF.pdf](http://www.unmz.cz/files/Sborniky_TH/GUM_-_celek_DEF.pdf)
- [11] Terminologie z oblasti metrologie (2. vydání). Sborníky technické harmonizace, ÚNMZ, Praha, 2010.
[www.unmz.cz/files/Sborniky_TH/Terminologie v oblasti metrologie_DEF.pdf](http://www.unmz.cz/files/Sborniky_TH/Terminologie_v_oblasti_metrologie_DEF.pdf)
- [12] Nejistoty měření – Část 3: Pokyn pro vyjádření nejistoty měření (GUM:1995), TNI 01 4109-3:2011, česko-anglický, překlad dokumentu ISO/IEC GUIDE 98-3:2008.
- [13] Mezinárodní metrologický slovník – Základní a všeobecné pojmy a přidružené termíny (VIM), TNI 01 0115:2009, česko-anglický, překlad dokumentu ISO/IEC GUIDE 99:2007.